

9.3. FÜGGVÉNYEK

A derékszögű koordináta-rendszer, pontthalmazok

- 1194** Adott a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán értelmezett következő függvény:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Adjuk meg a függvény grafikonjának a következő x értékekhez tartozó pontjait:

$$x = -1, 0, 1, 2, 3, 4.$$

- 1195** Adott a következő két pontthalmaz: $A = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } y \geq 1\}$, $B = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } x \geq 2\}$.
Ábrázoljuk a következő pontthalmazokat:

a) $A \cap B$;

b) $A \cup B$;

c) $A \setminus B$.

- 1196** Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ függvény. Adjuk meg a függvény grafikonjának a következő x értékekhez tartozó pontjait:

$$x = -1, 0, 1, 2, 3, 4.$$

- 1197** Ábrázoljuk a síkon azokat a pontthalmazokat, amelyekhez tartozó pontok koordinátái kielégítik a megadott feltételt:

a) $\min(x; y) = 1$;

b) $\max(x; y) = 1$;

c) $\max(|x|; |y|) = 1$.

Lineáris függvények

- 1198** Ábrázoljuk a következő valós számokon értelmezett függvényeket a derékszögű koordináta-rendszerben:

a) $x \mapsto 2x - 1$;

b) $x \mapsto -2x + 3$;

c) $x \mapsto 3x - 6$;

d) $x \mapsto 4x - 2$;

e) $x \mapsto -5x + 7$;

f) $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x + 2$;

g) $x \mapsto \frac{1}{3} \cdot x - 1$;

h) $x \mapsto \frac{2}{5} \cdot x$;

i) $x \mapsto -\frac{3}{2} \cdot x + 6$;

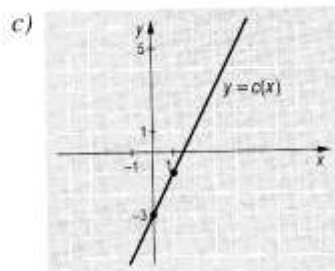
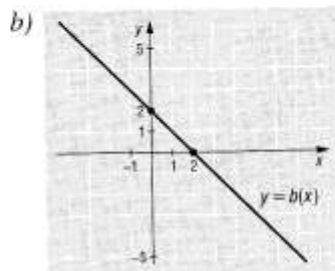
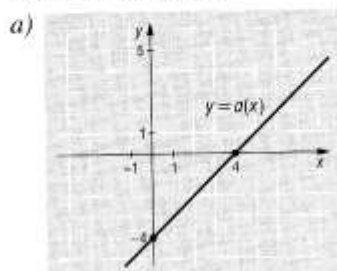
j) $x \mapsto -\frac{2}{5} \cdot x + 4$;

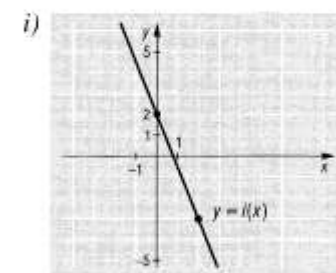
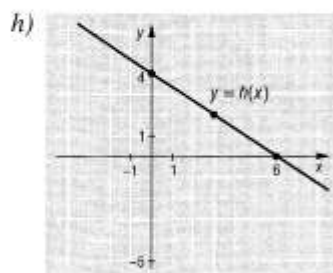
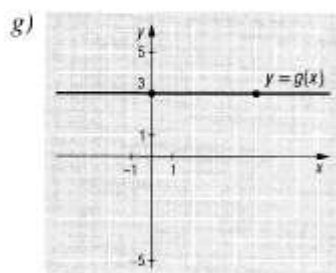
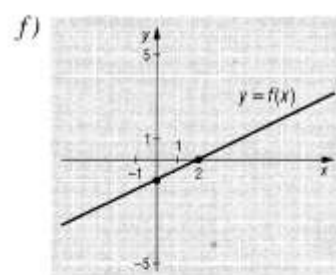
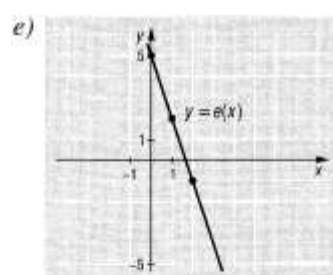
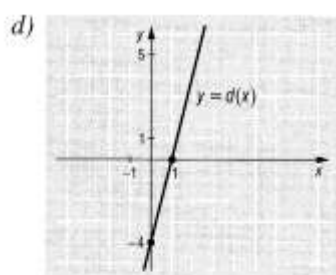
k) $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x - 4) + 1$;

l) $x \mapsto -\frac{1}{3} \cdot (x - 6) + 2$;

m) $x \mapsto 2 \cdot (x + 2) - 3 \cdot (x + 1)$.

- 1199** Az alábbi ábrákon lineáris függvények grafikonja látható. Adjuk meg a függvények hozzárendelési szabályát.





1200 Döntsük el, hogy az adott pontok közül melyik illeszkedik a megadott egyenesekre:

$$P(0; -1), \quad Q(1; 1), \quad R(2; 5).$$

Az adott egyenesek a következő függvények képei:

a) $f(x) = 3x - 1$;

b) $g(x) = 2x - 1$;

c) $h(x) = 2x + 1$.

1201 Határozzuk meg annak a lineáris függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek a grafikonja áthalad az adott $P(3; 3)$ és $Q(2; 0)$ pontokon. Adjuk meg a függvény meredekségét és azokat a pontokat, ahol a grafikon (egyenes) metszi az x és y tengelyeket.

1202 Az $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$ függvényről tudjuk, hogy a és b valós számok, valamint $f(-1) = 2$, $f(2) = 3$. Adjuk meg képlettel az f függvényt.

1203 Az A és B város távolsága 400 km. A -ból egy teherautó indul B -be, és 6 óra alatt ér oda. Ugyanakkor indul egy személyautó B -ből A -ba ugyanazon az útvonalon, és 4 óra alatt ér A -ba. Az indulás után hány óra múlva találkozik a két autó? Oldjuk meg a feladatot függvények segítségével.

1204 Két város, A és B közötti távolság 300 km. A -ból egy lassú jármű indul B -be, megállás nélkül 6 óra alatt ér oda. Ugyanakkor indul B -ből egy gyorsabb teherautó A -ba, az is megállás nélkül megy, és 4 óra alatt ér A -ba. Hol találkozott a két jármű útközben, és indulásuk után hány órával?

Az abszolútérték-függvény

1205 Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett következő függvényeket a derékszögű koordináta-rendszerben.

a) $x \mapsto |x| - 2$;

b) $x \mapsto |x| + 1$;

c) $x \mapsto |x - 3|$;

d) $x \mapsto |x + 4|$;

e) $x \mapsto -|x| + 1$;

f) $x \mapsto -|x - 1|$;

g) $x \mapsto |x + 1| - 2$;

h) $x \mapsto |x - 2| + 2$;

i) $x \mapsto |x - 4| - 3$;

j) $x \mapsto 2 \cdot |x|$;

k) $x \mapsto 2 \cdot |x - 1|$;

l) $x \mapsto |2x - 3|$;

m) $x \mapsto -\frac{1}{2} \cdot |x + 2| + 2$.

1206 Ábrázoljuk a következő intervallumokon értelmezett valós függvényeket:

a) $x \mapsto \frac{|x+1| - |x-1|}{2}, x \in [-2; 2];$

b) $x \mapsto \frac{x-1}{|x-1|}, x \neq 1, x \in [-3; 3];$

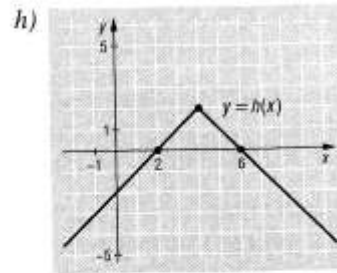
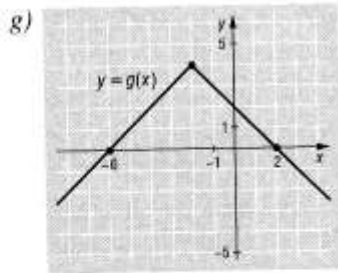
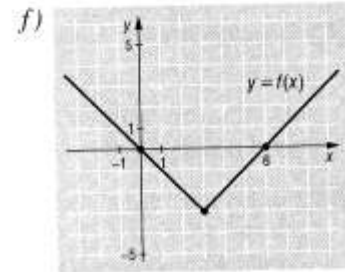
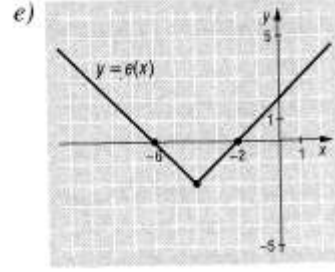
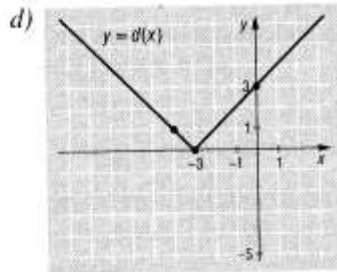
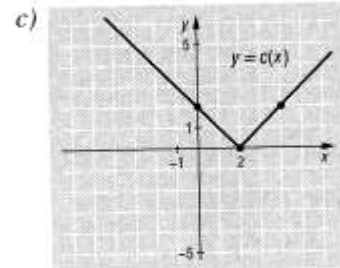
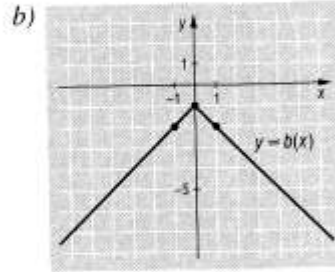
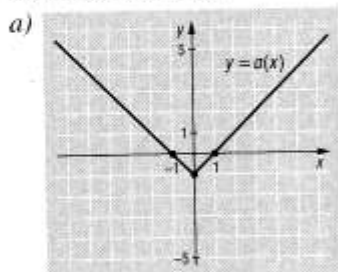
c) $x \mapsto |x+2| - |x-1|, x \in [-3; 2];$

d) $x \mapsto 2 \cdot |x+3|, x \in [-4; 2];$

e) $x \mapsto x-1-2 \cdot |x-1|, x \in [-3; 3];$

f) $x \mapsto |x+1| + |x-2|, x \in [-2; 3].$

1207 Az alábbi ábrákon abszolútérték-függvények grafikonja látható. Adjuk meg a függvények hozzárendelési szabályát.



1208 Ábrázoljuk az alábbi függvényt ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$):

$$g(x) = \frac{-|x|}{x}.$$

1209 Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett következő függvényt:

$$f(x) = \left| |x| - 3 \right| - 2.$$

1210 Igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left(\frac{x+|x|}{2} \right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2} \right)^2 = x^2.$$

1211 Ábrázoljuk a síkon azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyeknek koordinátái kielégítik a következő feltételt:

a) $|x| = 0$; b) $|x| = |y|$; c) $|x| + |y| \geq 1$; d) $|x| + |y| = 2$.

1212 Ábrázoljuk a síkon azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyeknek koordinátái kielégítik a következő feltételeket:

a) $|x + y| + |y - x| \leq 4$; b) $|2x| = |y|$; c) $|y| - |x| = 1$.

A másodfokú függvény

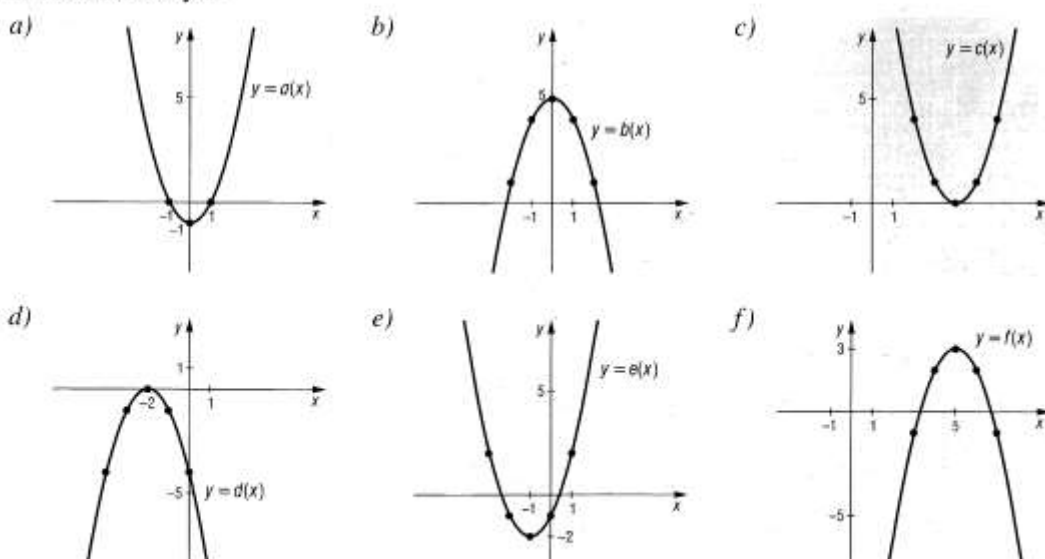
1213 Ábrázoljuk és jellemezzük (értékkészlet, zérushely, menete, szélsőérték, paritás szempontjából) a következő, valós számok halmazán értelmezett függvényeket:

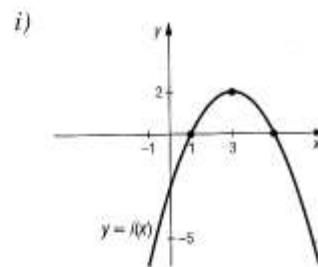
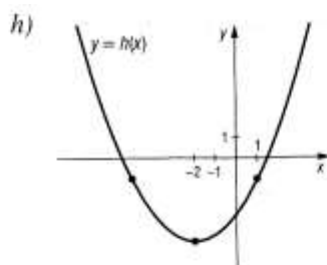
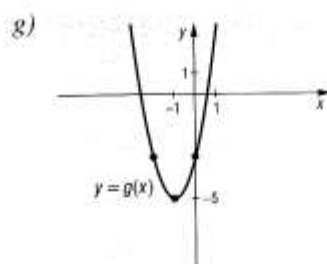
a) $x \mapsto x^2 + 2$; b) $x \mapsto (x + 2)^2$; c) $x \mapsto (x - 3)^2$;
d) $x \mapsto -x^2 + 4$; e) $x \mapsto -(x - 2)^2$; f) $x \mapsto -(x + 3)^2$;
g) $x \mapsto (x - 1)^2 - 4$; h) $x \mapsto -(x + 2)^2 + 1$; i) $x \mapsto 2 \cdot (x - 4)^2 - 2$;
j) $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x + 2)^2 + 1$; k) $x \mapsto x^2 - 4x + 3$; l) $x \mapsto x^2 + 2x - 3$.

1214 Ábrázoljuk és jellemezzük (értékkészlet, zérushely, menete, szélsőérték, paritás szempontjából) a következő függvényeket az adott intervallumon:

a) $x \mapsto x^2 - 4$, $x \in [-3; 3]$; b) $x \mapsto 2x - x^2$, $x \in [-2; 3]$;
c) $x \mapsto |4x - x^2|$, $x \in [-2; 2]$; d) $x \mapsto |2 \cdot |x| - x^2|$, $x \in [-3; 3]$;
e) $x \mapsto |2x^2 - 3x + |x - 1||$, $x \in [-1; 2]$; f) $x \mapsto x \cdot |x|$, $x \in [-2; 2]$.

1215 Az alábbi ábrákon másodfokú függvények grafikonja látható. Adjuk meg a függvények hozzárendelési szabályát:





1216 Ábrázoljuk a következő intervallumokon értelmezett valós értékű függvényeket:

a) $x \mapsto x \cdot |x - 3|$, $x \in [-2; 4]$;

b) $x \mapsto x^2 - 2 \cdot |x + 1| - 1$, $x \in [-2; 2]$;

c) $x \mapsto x \cdot |x| - 4x - 5$, $x \in [-3; 3]$;

d) $x \mapsto \frac{|x - 1|}{x - 1} \cdot (x^2 + 3)$, $x \neq 1$, $x \in [-2; 2]$.

1217 Oldjuk meg függvénygrafikonok alkalmazásával a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$;

b) $9x - 14 - x^2 > 0$;

c) $x^2 - 5 \cdot |x| + 4 < 0$;

d) $|x^2 - 4x| > 0$;

e) $2x^2 - 5 \cdot |x| + 3 \geq 0$.

1218 Oldjuk meg lineáris függvények segítségével az alábbi másodfokú egyenlőtlenségeket:

a) $(x - 3) \cdot (x + 2) \geq 0$;

b) $\frac{(x - 4) \cdot (x + 1)}{(2 - x) \cdot (x - 1)} \leq 0$.

1219 Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvényt:

$$f: [-3; 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - |x| + 2.$$

Oldjuk meg grafikusán az $f(x) \geq 0$ egyenlőtlenséget.

1220 Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény másodfokú, és $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(3) = 10$. Adjuk meg képlettel f -et.

1221 Egy labdát ferde hajítással felrúgnak, pályáját az idő (másodperc) függvényeként (méterben) az $f(x) = 10x - x^2$ függvény írja le. Mennyi idő múlva esik le a labda, és milyen magasra jut? Az elrúgás után hány másodperc múlva lesz a legmagasabban?

1222 Egy bárány egy 48 méter hosszú drótkerítéssel körülvev téglalap alakú telken legel. A telek egyik oldala közvetlenül egy ház falához csatlakozik. Hogyan válasszuk meg a téglalap oldalainak méretét, ha azt szeretnénk, hogy a bárány által lelegelhető kert területe maximális legyen?

1223 a) Bontsuk fel a 40-et két összeadandóra úgy, hogy a két adott rész szorzata maximális legyen.

b) Lássuk be, hogy az így kapott két rész az adott számtól függetlenül mindig a szám fele lesz.

1224 A p valós paraméter mely értékére igaz, hogy az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = px^2 + (p^2 - 40,5) \cdot x - 12$$

másodfokú függvénynek az $x = \frac{9}{4}$ helyen maximuma van? Mennyi ez a maximális érték?

1225 Adott a következő függvény:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10.$$

Adjuk meg képlettel az alábbi függvényeket:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + f(-x)), \quad h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) - f(-x)).$$

1226 Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvényt:

$$f: [-3; 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 10x^2 + 9.$$

1227 Határozzuk meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét:

$$f: [0; 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 8x^2 - 9.$$

A négyzetgyökfüggvény

1228 Ábrázoljuk és jellemezzük (értékkészlet, zérushely, menete, szélsőérték, paritás szempontjából) a következő függvényeket:

a) $x \mapsto \sqrt{x} - 3, x \in [0; 4];$

b) $x \mapsto \sqrt{x+3}, x \in [-3; 1];$

c) $x \mapsto \sqrt{-x+2}, x \in [-2; 2];$

d) $x \mapsto \sqrt{x+2} - 3, x \in [-2; 2];$

e) $x \mapsto \sqrt{x+2} - 1, x \in [-2; 2];$

f) $x \mapsto \sqrt{7-x} + 1, x \in [-2; 3];$

g) $x \mapsto \sqrt{1-|x|}, x \in [-1; 1];$

h) $x \mapsto \sqrt{(x^2+1)^2 - 4x^2}, x \in [-2; 2].$

1229 Oldjuk meg függvénygrafikonok alkalmazásával a következő egyenleteket:

a) $x+1 = \sqrt{11-x};$ b) $\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = 1;$ c) $\sqrt{12-x} = x;$ d) $\sqrt{7-x} = x-1;$

e) $x - \sqrt{x+1} = 5.$

1230 Ábrázoljuk és jellemezzük (értékkészlet, zérushely, szélsőérték szempontjából) a következő függvényt:

$$f(x) = \sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2-8x+16}, x \in [-3; 5].$$

1231 Adjuk meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét:

$$f(x) = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2}, x \in [-1; 3].$$

Hol veszi fel ezeket az értékeket az f függvény? Vázoljuk a függvény grafikonját.

1232 Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyeknek koordinátáira teljesül:

a) $1 + \sqrt{x} \geq y;$

b) $\sqrt{x-y} \geq \sqrt{x+y}.$

1233 Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő képlettel valós értékű függvényt értelmezhetünk:

a) $\sqrt{x+1};$

b) $\sqrt{x-x^2};$

c) $\sqrt{2+x-x^2};$

d) $\sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}.$

1234 Vázoljuk a következő függvény grafikonját:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1.$$

Igazoljuk, hogy a grafikon minden pontja az origótól 1 egység távolságra van.

1235 Ábrázoljuk azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyek koordinátáira teljesül:

$$y - 2 \leq \sqrt{1-x^2}.$$

1236 Ábrázoljuk a síkon azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyek koordinátáira teljesül:

$$y + \frac{1}{2} > \sqrt{x^2 - 2x + 1}.$$

1237 Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\sqrt{10-2x} = x-1.$$

1238 Függvények használatával oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\sqrt{2x+1} = x-1.$$

1239 Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\sqrt{5-x^2} = x+1.$$

Lineáris törtfüggvények

1240 Ábrázoljuk és jellemezzük (zérushely, szélsőérték, monotonitás szempontjából) a következő függvényeket:

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}, x \neq 1, x \in [-2; 3];$

b) $g(x) = -\frac{1}{x+2}, x \neq -2, x \in [-3; 1];$

c) $h(x) = \frac{1}{x-2} + 2, x \neq 2, x \in [-1; 5];$

d) $i(x) = \frac{1}{x+3} - 4, x \neq -3, x \in [-6; 0];$

e) $j(x) = \frac{2}{x-1} + 3, x \neq 1, x \in [-2; 4];$

f) $k(x) = \frac{1}{1-x}, x \neq 1, x \in [-3; 2];$

g) $l(x) = \frac{2}{2-x} + 1, x \neq 2, x \in [-1; 5];$

h) $m(x) = \frac{1}{|x-1|}, x \neq 1, x \in [-2; 2].$

1241 Ábrázoljuk és jellemezzük (értékkészlet, zérushely, monotonitás, szélsőérték szempontjából) a következő függvényeket:

a) $x \mapsto \frac{2x-1}{x-1}, x \neq 1, x \in [-1; 3];$

b) $x \mapsto \frac{2 \cdot |x| - 1}{x-3}, x \neq 3, x \in [-1; 4];$

c) $x \mapsto \left| \frac{x-2}{x-3} \right|, x \neq 3, x \in [0; 5];$

d) $x \mapsto \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 16}, x \neq 4, x \in [2; 6].$

1242 Oldjuk meg a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket függvénygrafikonok felhasználásával:

a) $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3};$

b) $\frac{1}{|x|-3} = \frac{1}{2};$

c) $\frac{2}{|x-4|} > 1;$

d) $\frac{x-1}{x+1} < x.$

1243 Adott a következő függvény:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Határozzuk meg az

$$f(f(x)) \text{ és az } f(f(f(x)))$$

függvényeket.

1244 Igazoljuk, hogy az

$$f(x) = \frac{x^2 + 16}{4x}, 1 \leq x \leq 6$$

függvény legkisebb értéke 2. Vázoljuk a függvény grafikonját.

1245 Függvények használatával oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\frac{x-1}{x+1} < x.$$

1246 Oldjuk meg grafikusán a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\left. \begin{array}{l} a) \ x + y = 7 \\ y = \frac{6}{x} \end{array} \right\}; \quad b) \ \left. \begin{array}{l} xy = -12 \\ x - y = 7 \end{array} \right\}.$$

1247 Melyek azok a p valós számok, amelyekre az

$$\left. \begin{array}{l} xy = 1 \\ y = px + 1 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszernek egyetlen $(x; y)$ valós számpár a megoldása? Használjunk a megoldáshoz függvényeket.

1248 Igazoljuk, hogy ha $x \neq 0$ és $y \neq 0$, akkor

$$4 \cdot \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) - 12 \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 17$$

minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén nemnegatív.

1249 Ábrázoljuk a következő két függvényt:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x+1) \cdot (x-1), \quad g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

A grafikonok alapján oldjuk meg:

$$a) f(x) = g(x); \quad b) f(x) < g(x); \quad c) f(x) > g(x).$$

1250 Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$2x^4 - 4xy + 2y^4 + 1 = 0.$$

1251 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 6x + 6y = 0 \\ y^2 - 2xy + 9 = 0 \end{array} \right\}.$$

Az egészrész-, a törtrész- és az előjelfüggvény

1252 Ábrázoljuk a következő függvényeket:

$$\begin{array}{ll} a) x \mapsto [2x], x \in [-2; 2]; & b) x \mapsto [x-1] + 1, x \in [-3; 3]; \\ c) x \mapsto \operatorname{sgn}(x-2), x \in [-2; 6]; & d) x \mapsto \{x\} - 1, x \in [-3; 3]; \\ e) x \mapsto -2 \cdot \operatorname{sgn}(x+2), x \in [-6; 2]; & f) x \mapsto -[x+2] + 2, x \in [-6; 2]; \\ g) x \mapsto [x]^2 + [-x], x \in [-2; 3]; & h) x \mapsto \operatorname{sgn}(x^2 + 2x), x \in [-3; 2]; \\ i) x \mapsto \operatorname{sgn}[-x] + 2, x \in [-3; 3]. \end{array}$$

1253 Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenleteket:

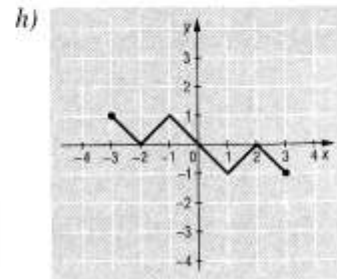
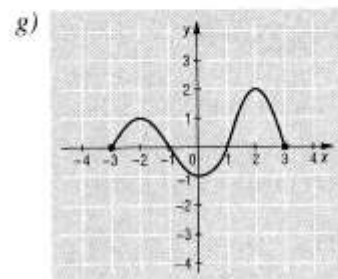
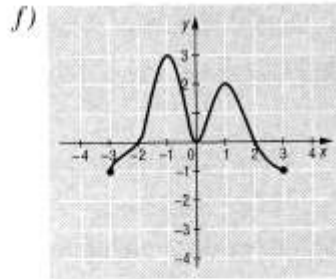
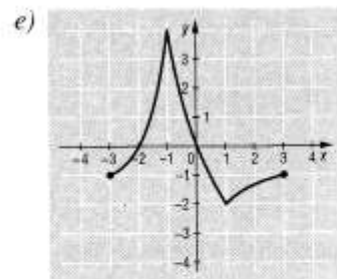
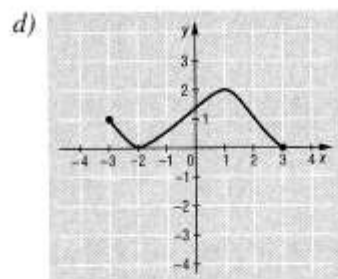
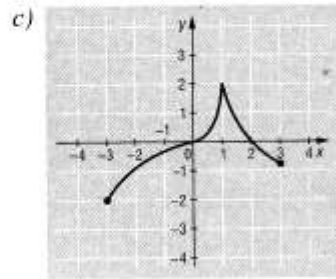
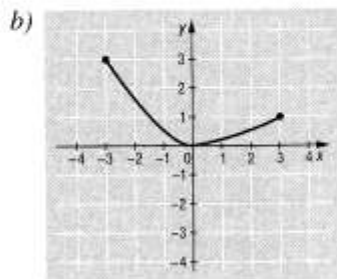
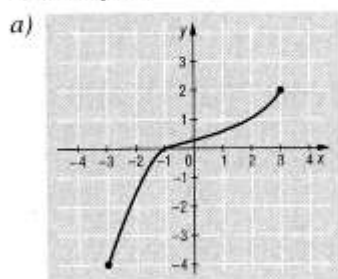
$$\begin{array}{lll} a) 2 \cdot [x] = [2x]; & b) [x+3] = 3 + [x]; & c) [x+0,5] + [x-0,5] = [2x]; \\ d) [x] + [x+0,5] = [2x]. \end{array}$$

1254 Ábrázoljuk a következő függvényeket:

$$a) x \mapsto [x] + [-x], x \in \mathbb{R}; \quad b) x \mapsto -[-x+0,5], x \in \mathbb{R}; \quad c) x \mapsto x + \{x\}, x \in \mathbb{R}.$$

Vegyes feladatok

1255 Az alábbi ábrákon egy-egy $[-3; 3]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Mely intervallumokon növekszik, illetve fogy a függvény? Határozzuk meg a függvények szélsőértékeit, zérushelyeit.



1256 Ábrázoljuk a következő függvényeket:

a) $f: [-9; 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -|x+5|+3, & \text{ha } x < -2, \\ \sqrt{x+2}, & \text{ha } x \geq -2; \end{cases}$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 2 \cdot (4-x), & \text{ha } x \geq 1, \\ (x+1)^2, & \text{ha } x < 1. \end{cases}$

1257 Határozzuk meg a következő függvények grafikonjának a koordináta-tengelyekre illeszkedő pontjait, ha vannak. Ábrázoljuk is a függvényeket.

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{-5}{x};$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 5;$

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -4x;$

d) $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x-6}{3};$

$$e) j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2 - \frac{5}{3} \cdot x;$$

$$f) k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2} \cdot |x - 2|;$$

$$g) l: \mathbb{R} \setminus]3; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{3 - x}.$$

1258 Állítsuk párba az ábrán látható függvényeket a hozzárendelési szabályukkal.

$$a) x \mapsto |x| + 2;$$

$$b) x \mapsto -5;$$

$$c) x \mapsto 2 \cdot \sqrt{x - 4};$$

$$d) x \mapsto -2 \cdot (x + 3)^2 - 1;$$

$$e) x \mapsto -\frac{1}{2} \cdot x.$$

Válaszoljunk a következő kérdésekre.

f) Melyik az egyenes arányosság függvény?

g) Melyik függvénynek van zérushelye?

h) Melyik függvénynek van maximuma? Határozzuk is meg.

i) Az $f_2(x)$ függvény milyen helyen veszi fel a 2 függvényértéket?

j) Mennyi a meredeksége az $f_5(x)$ függvénynek?

k) Az $f_1(x)$ függvénynek mennyi lesz az $f_1(1)$ helyen vett függvényértéke?

l) Igaz-e, hogy $f_3(-2) = -3$?

1259 Melyek a szélsőértékei az alábbi függvényeknek, ha $x \in [-3; 6]$? Hol veszik fel azokat? Ábrázoljuk is őket.

$$a) a(x) = -\frac{1}{3} \cdot x;$$

$$b) b(x) = -3;$$

$$c) c(x) = |2x - 4|;$$

$$d) d(x) = -|x + 1|;$$

$$e) e(x) = \sqrt{x + 3}.$$

Hol pozitívak az adott függvények? A válaszokat intervallumokkal adjuk meg.

1260 Ábrázoljuk a következő függvényt:

$$f: [0; 6] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x, & \text{ha } x < 3, \\ 1, & \text{ha } x = 3, \\ x, & \text{ha } x > 3. \end{cases}$$

Válaszoljunk a kérdésekre.

a) Határozzuk meg a függvény zérushelyét.

b) Hol negatív a függvény?

c) Hol nő a függvény?

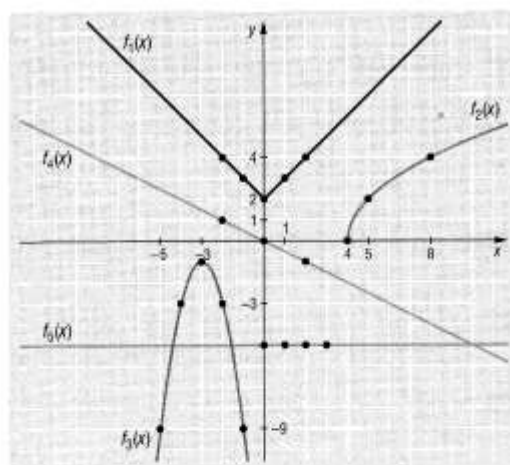
1261 Ábrázoljuk az $f(x) = ||x| - 2| - 3$ függvényt, majd állapítsuk meg, mely helyeken veszi fel a $-3, -2, -1, 0, 1$ értékeket. Mit mondhatunk a függvény paritásáról?

1262 Ábrázoljuk az $f(x) = |x - 2| - |3 - x|$ függvényt.

a) Számoljuk ki a következő függvényértékeket: $f(4), f(2), f(0)$.

b) Milyen helyen veszi fel a függvény az 1 értéket?

c) Határozzuk meg a függvény zérushelyét.



1263 Oldjuk meg grafikusán az alábbi egyenleteket:

a) $\frac{x}{3} = 7 - 2x$;

b) $|x - 2| = \sqrt{x}$;

c) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = x - 3$;

d) $3 - |x - 4| = \sqrt{x - 1}$;

e) $\frac{2}{x} = (x - 1)^2 \quad (x \neq 0)$.

1264 Oldjuk meg grafikusán az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $\sqrt{x - 2} > (x - 2)^2$;

b) $-2 \cdot |x| + 3 \geq x^2$;

c) $\frac{x^2}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot x + 1$;

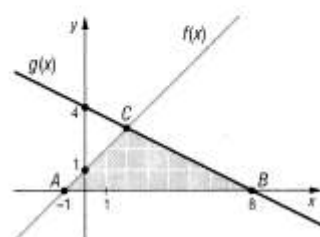
d) $x^2 - 6x + 7 < \frac{2}{x - 4}$.

1265 Bontsuk fel a 30-at két pozitív szám összegére úgy, hogy az így kapott két pozitív egész szám négyzetének összege minimális legyen. Melyik ez a két szám?

1266 Írjuk fel az ábrázolt két függvény hozzárendelési szabályait. Határozzuk meg a színezett háromszög területét.

1267 Melyik az a valós szám, amelyhez a négyzetét hozzáadva a lehető legkisebb értéket kapjuk?

1268 A koordináta-rendszer $P(2;1)$ pontján áthaladó egyenesek közül melyik az, amely az első síknegyedből a legkisebb területű háromszöget metszi le?



1269 Adott az $f(x - 1) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ függvény. Adjuk meg az $f(x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$ függvényt.

1270 Adott az $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$ függvény. Határozzuk meg az alábbi függvényt:

$$f_n(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{n\text{-szer}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1271 Adjuk meg a valós számok megfelelő részhalmazán értelmezett f függvényt, ha tudjuk, hogy

a) $f(x + 1) = x^2 - 3x + 2$;

b) $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1 + x}$, $x > 0$;

c) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x > 0$.

1272 Határozzuk meg a következő függvények inverz függvényét:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$;

b) $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;

c) $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;

d) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$;

e) $f: [-1; 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

f) $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

1273 Határozzuk meg a következő függvények legnagyobb és legkisebb értékét (ha van ilyen):

a) $x \mapsto |x - 1| + |x - 3|$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $x \mapsto \frac{2x - 5}{x - 2}$, $0 \leq x \leq 1$;

c) $x \mapsto \frac{x + 1}{x + 2} - 3$, $-1 \leq x \leq 2$.

1274 Igazoljuk, hogy ha $|x| \leq \frac{1}{2}$, $x \neq 0$, akkor

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x} \leq 1.$$

1275 Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{1+y^2}.$$

1276 Hány gyöke van a valós számok halmazán az alábbi egyenletnek:

$$|x^2 - 1| = |x|?$$

1277 a) Igazoljuk, hogy azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a halmaza, amelyeknek koordinátái kielégítik az

$$y = \sqrt{4x - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 4$$

egyenletet, egy $(2; 0)$ középpontú, 2 sugarú félkör, amely az $y \geq 0$ félsíkban van.

b) Határozzuk meg a következő függvény legnagyobb és legkisebb értékét:

$$x \mapsto \sqrt{x \cdot (4 - x)}, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

1278 Oldjuk meg függvénygrafikonok felhasználásával a következő egyenleteket:

a) $x^3 = 2x + 4;$

b) $|x| - 1 = 1 - x^2;$

c) $\sqrt{x+2} = 4 - x;$

d) $x^2 - 4x = x - 6;$

e) $\frac{1}{x+1} + 2 = x + 3.$

1279 Melyek azok az $(x; y)$ valós számpárok, amelyek egyszerre kielégítik a következő egyenlőtlenségeket:

$$\left. \begin{aligned} y + \frac{1}{2} &> |x^2 - 2x| \\ y &< 2 - |x - 1| \end{aligned} \right\}.$$

Oldjuk meg függvénygrafikonokkal.

1280 Döntsük el, hogy a következő függvények közül melyik páros, melyik páratlan, és melyik se nem páros, se nem páratlan. A függvények $\mathbb{R}$ -ből $\mathbb{R}$ -be képeznek.

a) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2};$

b) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2};$

c) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6 \cdot |x|;$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x;$

e) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$

1281 Vázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $f:]-\infty; -1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{1+x^2};$

b) $g: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{2x}{1+x^2};$

c) $h: [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$

Adjuk meg képlettel mindegyik függvény inverzét is, és ezek grafikonját is vázoljuk.

1282 Igazoljuk, hogy az alábbi függvény az egész számegyenesen korlátos:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}.$$