KOORDINÁTA - GEOMETRIA

1.) $A\left(-4;\ \frac{1}{2}\right)$ $B\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$ $F\left(\frac{x_A+x_B}{2};\ \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$F\left(-\frac{3}{2};\ 1\right)$

2.) $r = 4$

$B = C(\underset{u}{-3};\ \underset{v}{5})$

$k:\ (x-u)^2+(y-v)^2=r^2$

$k:\ (x+3)^2+(y-5)^2=16$

3.) $P(\underset{x_0}{-2};\ \underset{y_0}{7})$

$\underline{n}(\underset{A}{5};\ \underset{B}{8})$

$e:\ Ax+By=Ax_0+By_0$

$5x+8y=5\cdot(-2)+8\cdot 7$

$e:\ 5x+8y=46$

4.) $\underline{a}(6;4)$

$\underline{a}-\underline{b}\ (11;5)$

$\underline{b}(x;y)$

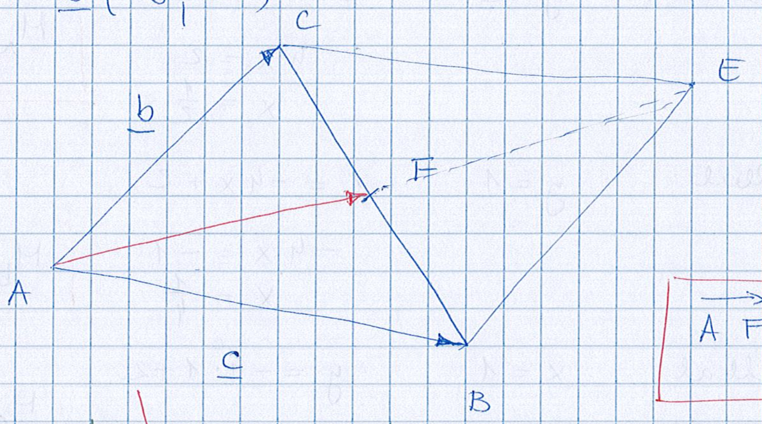
$\underline{b}(-5;-1)$

$6-x=11$ $4-y=5$

$-x=5$ $-y=1$

$x=-5$ $y=-1$

5.)

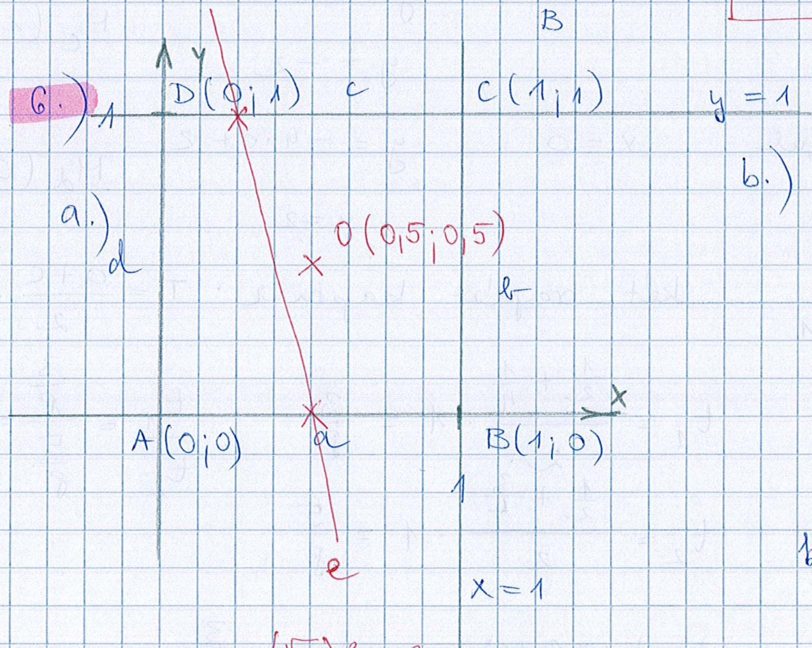


$\overrightarrow{AE}=\underline{b}+\underline{c}$

$\overrightarrow{AF}=\frac{\overrightarrow{AE}}{2}=\frac{\underline{b}+\underline{c}}{2}$

$\boxed{\overrightarrow{AF}=\frac{\underline{b}+\underline{c}}{2}}$

6.)



$r^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

b.) $kp:\ O\left(\underset{u}{\frac{1}{2}};\ \underset{v}{\frac{1}{2}}\right)$

$r=\frac{\text{átló}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a=1$

$e=f=a\sqrt{2}=\sqrt{2}$

$k:\ (x-u)^2+(y-v)^2=r^2$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

7.) $\overset{x_0\ y_0}{P(3;5)}$

$e \parallel f \quad f: 4x+5y=0 \quad \underline{n}_f(4;5)$

$e \parallel f \iff \underline{n}_e = \underline{n}_f \quad \underline{n}_e(\underset{A}{4};\underset{B}{5})$

$e: \quad Ax+By = Ax_0+By_0$

$4x+5y = 4\cdot3+5\cdot5$

$e: \quad 4x+5y=37$

6.) d.) [kimaradt véletlenül...]

A négyzet oldalainak egyenesei:

$x=1$ c oldal

$y=1$ b oldal

$x=0$ d oldal

$y=0$ a oldal

$e: \quad y=-4x+2$

metszéspontok az oldalakkal:

a oldallal: $y=0 \quad 0=-4x+2$

$4x=2$

$x=\frac{1}{2}$ $\quad \boxed{M_a\left(\frac{1}{2};0\right)}$

b oldallal: $y=1 \quad 1=-4x+2$

$-4x=-1$

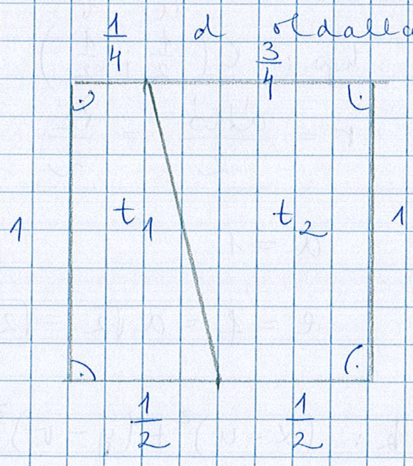
$x=\frac{1}{4}$ $\quad \boxed{M_b\left(\frac{1}{4};1\right)}$

c oldallal: $x=1 \quad y=-4\cdot1+2$

$y=-2$ $\quad M_c(1;-2)$

d oldallal: $x=0 \quad y=-4\cdot0+2$

$y=2$ $\quad M_d(0;2)$



két trapézt kapunk: $T=\frac{a+c}{2}\cdot m$

$t_1 = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}\cdot 1 = \frac{3}{8} \qquad \frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}$

$t_2 = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2}\cdot 1 = \frac{5}{8}$

A területek aránya $\frac{3}{5}$

(2)

8.) rombusz átlói ⊥-ek egymásra, ezért a skalárszorzatuk 0.

$\underline{e} \perp \underline{f} \iff \underline{e} \cdot \underline{f} = 0$

9.) a.) $e: 4x + 3y = -11$

$3y = -4x - 11$

$y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$

ábrázolja az, akinek 6 angyá volt...

y tg-t a $-\frac{11}{3}$-nál metszi

meredekség: $m = -\frac{4}{3}$ 3-at jobbra 4-et lefelé

$P(\underset{x}{100}; \underset{y}{-36})$ be kell helyettesíteni az egyenletbe, és ha az egyenlőség igaz, akkor rajta van, ha nem igaz, akkor nincs.

$4 \cdot 100 + 3 \cdot (-36) \neq -11$

$400 - 108 \neq -11$

$292 \neq -11 \Rightarrow$ nincs rajta.

$Q(x; 107)$ abszcissza: x koordináta

ordináta: y koordináta

$4x + 3 \cdot 107 = -11$

$4x = -332$

$x = -83$ $\boxed{Q(-83; 107)}$

b.) $A(-5; 3)$ kör kp-ja: $F_{AB}(\overset{u}{-2}; \overset{v}{-1})$

$B(1; -5)$ kör sugara: $r = \frac{d}{2} = \frac{d_{AB}}{2} = 5$

$d_{AB} = \sqrt{(1+5)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$

$k: (x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$

$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$

$S(1; 3)$

$(1+2)^2 + (3+1)^2 = 9 + 16 = 25$

rajta van S a körön

c.)

$S(1;3)$

$A(-5;3)$

$B(1;-5)$

$C(x;y)$

$\boxed{C(7;11)}$

$\frac{-5+1+x}{3} = 1 \qquad \frac{3-5+y}{3} = 3$

$-4+x = 3 \qquad -2+y = 9$

$x = 7 \qquad y = 11$

10.)

$\underline{a} = 3\underline{i} - 2\underline{j}$

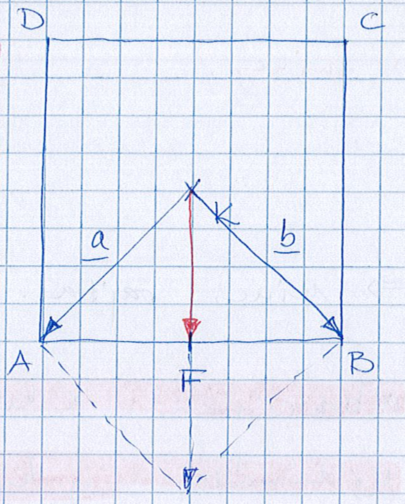
$\underline{b} = -\underline{i} + 5\underline{j}$

$\underline{c} = 2\underline{a} - \underline{b} = 2(3\underline{i} - 2\underline{j}) - (-\underline{i} + 5\underline{j}) =$

$= 6\underline{i} - 4\underline{j} + \underline{i} - 5\underline{j} = 7\underline{i} - 9\underline{j}$

$\boxed{\underline{c} = 7\underline{i} - 9\underline{j}}$

11.)



$\overrightarrow{KF} = \frac{a+b}{2}$

12.)

$A(9;-8) \qquad r = 10$

$u \quad v$

$k: (x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$

$(x-9)^2 + (y+8)^2 = 100$

$e \cap k = \{M_1; M_2\}$

a.) $\left.\begin{array}{l} y = -16 \\ (x-9)^2 + (y+8)^2 = 100 \end{array}\right\}$

$(x-9)^2 + (-16+8)^2 = 100$

$(x-9)^2 + 64 = 100$

$(x-9)^2 = 36$

$|x-9| = 6$

$x - 9 = 6 \qquad x_1 = 15 \qquad M_1(15; -16)$

$x - 9 = -6 \qquad x = 3 \qquad M_2(3; -16)$

b.) $P = E(1; -2)$

$AP \perp e \iff \underline{v}_{AP} = \underline{n}_e$

$A(9; -8)$

$P(1; -2)$

$\underline{v}_{AP}(8; -6) \sim (4; -3)$

$\underline{v}(x_A - x_P; y_A - y_P)$

$\underline{n}_e(\overset{A}{4}; \overset{B}{-3})$ $\quad P(\overset{x_0}{1}; \overset{y_0}{-2})$ $\quad e: Ax + By = Ax_0 + By$

$e: 4x - 3y = 4 \cdot 1 - 3 \cdot (-2)$

$\boxed{e: 4x - 3y = 10}$

$4x - 3y = 10$

$4x - 10 = 3y$

$y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$

$m = \frac{4}{3}$ $\quad y = m x + b$

↳ meredekség = iránytg.

13.) $A(-7; 12)$

$\underline{r}(x; y)$

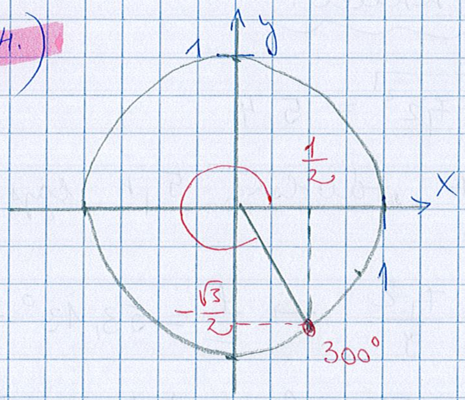
A-t $\underline{r}$-rel eltolva $B(5; 8)$

$-7 + x = 5 \rightarrow x = 12$

$12 + y = 8 \rightarrow y = -4$

$\boxed{\underline{r}(12; -4)}$

14.)



$e\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ NEM

$e\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ NEM

$e\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ IGEN

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

$-\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$e(\sin 30°; -\cos 30°)$ IGEN

15.) $\underline{a}(5; 8)$

$\underline{b}(-40; 25)$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = 5 \cdot (-40) + 8 \cdot 25 = 0$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \iff \underline{a} \perp \underline{b}$

a két vektor szöge 90°

16.) $k:\ x^2+y^2-6x+8y-56=0$

$e:\ x-8,4=0 \longrightarrow x=8,4$

$k \cap e = \{M_1; M_2\}$

$8,4^2+y^2-6\cdot 8,4+8y-56=0$

$y^2+8y-35,84=0$

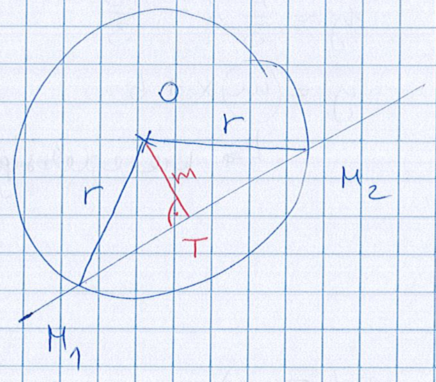
$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-8\pm\sqrt{64+143,36}}{2}=\frac{-8\pm 14,4}{2}=$

$= \begin{cases} 3,2 \\ -11,2 \end{cases}$

$M_1(8,4;\ -11,2)$

$M_2(8,4;\ 3,2)$

b.)



$x^2+y^2-6x+8y-56=0$

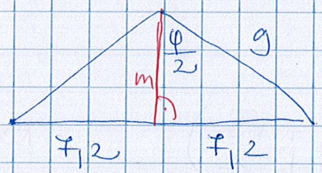
$\boxed{x^2-6x}+\left(y^2+8y\right)-56=0$

$\boxed{(x-3)^2-9}+\left((y+4)^2-16\right)-56=0$

$(x-3)^2+(y+4)^2=81 \Rightarrow \underline{r=9}$

$d_{M_1M_2}=3,2-(-11,2)=14,4$ (x koordinátájuk megegyezik)

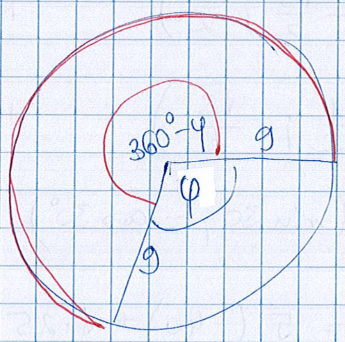
Pitagorasz-tétellel:



$m=\sqrt{9^2-7,2^2}=5,4$

A keresett távolság 5,4 egység.

c.)



$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{7,2}{9} \longrightarrow \frac{\varphi}{2}=53,13° \longrightarrow \varphi=106,26°$

$360°-\varphi=253,74°$ ívhossz $=\frac{\alpha}{360°}\cdot K_O$

ívhossz $=\frac{253,74°}{360°}\cdot 2\cdot 9\cdot\pi \approx 39,86 \approx \underline{39,9}$

KEREKÍTÉS!!!

(4.)

17.) ABC $\triangle$

$A(0;0)$

$B(-2;4)$

$C(4;5)$

a.) AB egyenlete

$\underline{v}_c(2;-4) \sim (1;-2) \Rightarrow \underline{n}_c \overset{A\ \ B}{(2;1)}$

$\underline{n}_c(2;1) \quad A(\overset{x_0}{0};\overset{y_0}{0})$

$Ax + By = Ax_0 + By_0$

$\boxed{2x + y = 0}$

b.) legnagyobb szög (a leghosszabb oldallal szemközti szög)

$d_{AB} = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$ $\quad c = \sqrt{20}$

$d_{AC} = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$ $\quad b = \sqrt{41}$ $\quad \boxed{\beta} > \alpha > \gamma$

$d_{BC} = \sqrt{6^2+1^2} = \sqrt{37}$ $\quad a = \sqrt{37}$

koszinusz-tétellel:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$

$41 = 37 + 20 - 2 \cdot \sqrt{37}\sqrt{20} \cos\beta$

$\cos\beta = \dfrac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \dfrac{41-37-20}{-2\sqrt{37\cdot 20}} \rightarrow \beta = 72{,}897°$

$\underline{\beta = 72{,}9°}$

c.) $t_{ABC} = \dfrac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2} = \dfrac{\sqrt{37}\cdot\sqrt{20}\cdot\sin 72{,}9°}{2} = \underline{\underline{13}}$

18.)

$e: \quad y = -2x + 3 \rightarrow 2x + y = 3 \quad \underline{n}_e(2;1)$

$f: \quad y = ax - 1 \rightarrow -ax + y = -1 \quad \underline{n}_f(-a;1)$

$g: \quad y = bx - 4 \rightarrow -bx + y = -4 \quad \underline{n}_g(-b;1)$

$e \parallel f \Leftrightarrow \underline{n}_e = \underline{n}_f \Rightarrow -a = 2$

$\boxed{a = -2}$

$g \perp e \Leftrightarrow \underline{v}_e = \underline{n}_g$

$\underline{n}_e = \underline{v}_g$ $\quad \underline{v}_g(1;b) \sim (2;2b)$

$\underline{n}_e(2;1)$

$2b = 1 \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}}$

19.)

Kör kp-ját megkapjuk a húr [(1;0) (7;0)] felező ⊥-ének és $y = x$ egyenes metszéspontjaként

(1;0) és (7;0) húr felező merőlegese az $x = 4$ egyenes.

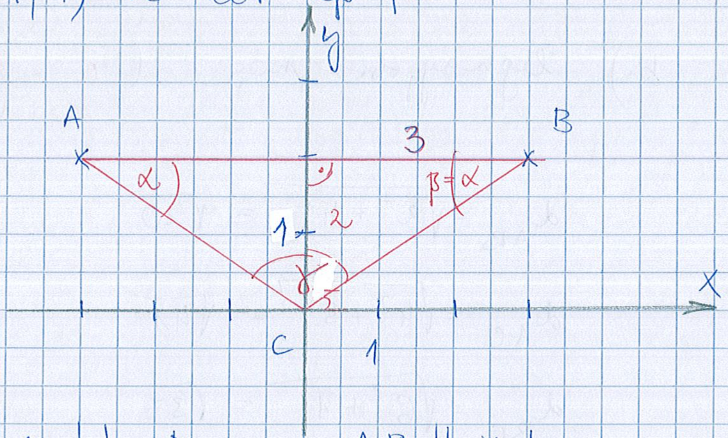
$$\left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = x \end{array}\right\} \quad (4;4) \text{ a kör kp-ja}$$

20.) ABC △

A(−3;2)

B(3;2)

C(0;0)

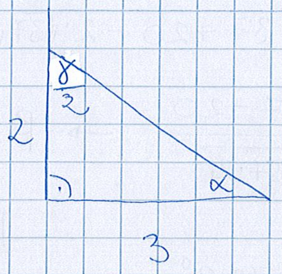


a.) ABC △ egyenlő szárú △

AB || x tg

AB felező ⊥-e y tg

$d_{AC} = d_{BC}$



$tg\,\alpha = \frac{2}{3} \rightarrow \alpha = 33{,}7^\circ$

$\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \alpha \rightarrow \gamma = 112{,}6^\circ$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = \beta = 33{,}7^\circ \\ \gamma = 112{,}6^\circ \end{array}}$$

b.) Körülírt kör kp-ja: oldalfelező ⊥-ek metszéspontja

$f_c = y$ tg

f_a felezőmerőleges: $f_a \perp a \quad F_a \in f_a$

$F_A(\overset{x_0}{1{,}5}; \overset{y_0}{1}) \qquad \underline{v}_a(3;2)$

$f_a \perp a \iff \underline{n}_{f_a} = \underline{v}_a \Rightarrow \underline{n}_{f_a}(\overset{A}{3}; \overset{B}{2})$

$f_a: \quad Ax + By = Ax_0 + By_0$

$3x + 2y = 3 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 1$

$$\boxed{f_a: 3x + 2y = 6{,}5}$$

20. b.) folytatás

f_c : y ty : $x=0$

f_a : $3x+2y=6{,}5$

$6x+4y=13$

$f_a \cap f_c = \{K\}$

$$\left.\begin{aligned} 6x+4y&=13 \\ x&=0 \end{aligned}\right\}$$

$6\cdot 0+4y=13$

$y=\dfrac{13}{4}$

$\boxed{K(0;\,3{,}25)}$

$r=d_{KC}=d_{KB}=d_{KA}$

$K(0;3{,}25)$ $\quad C(0;0)$ $\quad d_{KC}=\sqrt{0^2+3{,}25^2}=3{,}25$

k : $K(\overset{u}{0};\overset{v}{3{,}25})$ $\quad r=3{,}25$

$(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$

$\boxed{k: \quad x^2+(y-3{,}25)^2=3{,}25^2}$

21. a.)

$$\left.\begin{aligned} e:\ 5x-2y&=-14{,}5 \\ f:\ 2x+5y&=14{,}5 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &/\cdot 5 \\ &/\cdot 2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 25x-10y&=-72{,}5 \\ 4x+10y&=29 \end{aligned}\right\} (1)+(2)$$

$29x=-43{,}5$

$x=-1{,}5$

f: $2x+5y=14{,}5$ $\qquad M(-1{,}5;\,3{,}5)$

$-3+5y=14{,}5$

$5y=17{,}5$

$y=3{,}5$

b.) $e: \quad 5x - 2y = -14{,}5 \quad \rightarrow \quad \underline{n}_e(5;-2) \rightarrow \underline{v}_e(2;5)$

$f: \quad 2x + 5y = 14{,}5 \quad \rightarrow \quad \underline{n}_f(2;5)$

$\Downarrow$

$e \perp f \iff \underline{n}_e = \underline{v}_f$

$\underline{v}_e = \underline{n}_f$

$\underline{v}_e = \underline{n}_f$ teljesül

c.)

Az e egyenes x tg-lyel bezárt szöge számítható az e egyenes meredekségéből

$e: \quad 5x - 2y = -14{,}5$

$5x + 14{,}5 = 2y$

$y = \frac{5}{2}x + 7{,}25 \qquad m = \frac{5}{2} = 2{,}5$

$m = \operatorname{tg}\alpha = 2{,}5 \rightarrow \alpha = 68{,}2^\circ$

22.) $e \parallel f \qquad P \in e \qquad P(3;-2) \qquad f: \; 2x - y = 5$

$\underline{n}_f(2;-1)$

$e \parallel f \iff \underline{n}_e = \underline{n}_f$

$\underline{n}_e(\overset{A}{2}; \overset{B}{-1}) \qquad P(\overset{x_0}{3}; \overset{y_0}{-2}) \qquad Ax + By = Ax_0 + By_0$

$e: \quad 2x - y = 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) = 6 + 2 = 8$

$\boxed{e: \quad 2x - y = 8}$

23.) $(x+2)^2 + y^2 = 9 \qquad k: \; (x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$

$\boxed{C(-2;0) \quad r = 3}$

$C(u;v)$ a kör kp-ja

r a kör sugara

24.) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$

x tg $\iff$ $y = 0$ egyenes

$2x = 4$

$x = 2$

$\boxed{M(2;0)}$

$2x + y = 4$

$y = -2x + 4$

$\boxed{m = -2}$

$y = mx + c$

m: meredekség (= iránytg.)

25) PQR △ $P(-6; -1)$ $Q(6; -6)$ $R(2; 5)$

a.) P csúcshoz tartozó súlyvonal: P; F_{QR} pontokat

összekötő egyenes

$$F\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$Q(6; -6)$
$R(2; 5)$

$$x = \frac{6+2}{2} = 4$$

$$y = \frac{-6+5}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{F_{QR}\left(4; -\frac{1}{2}\right)} \qquad P(-6; -1)$$

x_1 y_1 x_2 y_2

két ponton áthaladó egyenes egyenlete:

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

$$(-6-4)\left(y+\frac{1}{2}\right) = \left(-1+\frac{1}{2}\right)(x-4)$$

$$-10\left(y+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}(x-4)$$

$$-10y - 5 = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$\boxed{s: \quad x - 20y = 14}$$

b.) QPR ∢ meghatározása

$\overrightarrow{PQ}(12; -5)$ (x_a, y_a)
$\overrightarrow{PR}(8; 6)$ (x_b, y_b) } helyvektorokkal

skaláris szorzat felhasználásával

$\underline{a}\,\underline{b} = x_a x_b + y_a y_b$
$\underline{a}\,\underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos\varphi$ } $\cos\varphi = \dfrac{x_a x_b + y_a y_b}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$

$$\underline{a}\,\underline{b} = 12 \cdot 8 - 5 \cdot 6 = 66$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$\cos\varphi = \frac{66}{130} \rightarrow \boxed{\varphi = 59{,}5^\circ}$$

26.) ABC △ A(−2; −1) B(9; −3) C(−3; 6)

a.) BC oldal egyenlete: két ponton áthaladó egyenes:

B(9; −3) C(−3; 6) $(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$

$x_1 \; y_1 \quad x_2 \; y_2$

$(-3-9)(y+3)=(6+3)(x-9)$

$-12y-36=9x-81$

$9x+12y=45$

$\boxed{3x+4y=15}$

b.) BC oldallal (a oldallal) ∥ középvonal hossza

T: A középvonal fele olyan hosszú, mint a vele párhuzamos oldal.

⇓

$d_{F_bF_c}=\dfrac{d_{BC}}{2}$

$d_{BC}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$ B($\overset{x_1}{9}$; $\overset{y_1}{-3}$) C($\underset{x_2}{-3}$; $\underset{y_2}{6}$)

$=\sqrt{(-3-9)^2+(6+3)^2}=$

$=\sqrt{144+81}=15$

A középvonal hossza: $\dfrac{15}{2}=7{,}5$ egység.

c.) ACB ∢ meghatározása: (skaláris szorzattal)

$\underline{a}=\overrightarrow{CA}\,(\overset{x_a}{-1};\overset{y_a}{7})$, $\underline{b}=\overrightarrow{CB}\,(\underset{x_b}{-12};\underset{y_b}{9})$ } helyvektorokkal $\cos\varphi=\dfrac{x_a x_b+y_a y_b}{|a|\cdot|b|}$

$\underline{a}\cdot\underline{b}=(-1)\cdot(-12)+7\cdot 9=75$

$|\underline{a}|=\sqrt{(-1)^2+7^2}=\sqrt{50}$

$|\underline{b}|=\sqrt{(-12)^2+9^2}=15$

$\cos\varphi=\dfrac{75}{15\cdot\sqrt{50}}=\dfrac{5}{\sqrt{50}} \rightarrow \boxed{\varphi=45^\circ}$

27.) ABC $\triangle$ $A(6;9)$ $B(-5;4)$ $C(-2;1)$

a.) $d_{AC} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} =$ $A(\overset{x_1}{6};\overset{y_1}{9})$ $C(\overset{x_2}{-2};\overset{y_2}{1})$

$= \sqrt{(-2-6)^2+(1-9)^2} = \sqrt{64+64} =$

$= \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

b.) AB oldalegyenes egyenlete: **két ponton átmenő egyenes:**

$A(\underset{x_1}{6};\underset{y_1}{9})$ $B(\underset{x_2}{-5};\underset{y_2}{4})$ $(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$

$(-5-6)(y-9)=(4-9)(x-6)$

$-11y+99=-5x+30$

$5x-11y=-69$

c.) $ACB = 90°$

$\overrightarrow{CA}(-8;-8)$

$\overrightarrow{CB}(3;-3)$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = -8\cdot3+(-8)\cdot(-3)=0$

Tétel:

$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB} \iff \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

két vektor a. cs. a. $\perp$, ha skaláris szorzatuk 0.

d.) ABC körülírt körének egyenlete

ABC $\triangle$ derékszögű $\Rightarrow$ **kp-ja az átfogó felező-pontja, sugara az átfogó fele** (Thalesz-tétel)

átfogó: AB szakasz; $F_{AB}\left(\overset{u}{\frac{1}{2}};\overset{v}{\frac{13}{2}}\right)$ $C(\overset{u}{0,5};\overset{v}{6,5})$

sugár: $r=\frac{d_{AB}}{2}=\frac{\sqrt{(6+5)^2+(9-4)^2}}{2}=\frac{\sqrt{146}}{2}$

kör egyenlete: $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$

$(x-0,5)^2+(y-6,5)^2=36,5$

28.) $\underline{a}(4;3) \quad \underline{b}(-2;1)$

a.) $|\underline{a}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5 \qquad |\underline{a}| = \sqrt{x_a^2+y_a^2}$

b.) $\underline{a}+\underline{b}\,(x_a+x_b;\ y_a+y_b)$

$\underline{a}+\underline{b}\,(2;4)$

29.) $k:\ x^2+y^2+2x-2y-47=0$

a.) $A(\underset{x}{7};\underset{y}{7})$ a.cs.a. illeszkedik a körre, ha kielégíti a körgenletet

$$7^2+7^2\underbrace{+2\cdot 7-2\cdot 7}_{0}-47 \overset{?}{=} 0$$

$$49+49-47 \overset{?}{=} 0$$

$51 \neq 0 \implies A$ nem illeszkedik a körre

b.) $x^2+2x+y^2-2y-47=0$

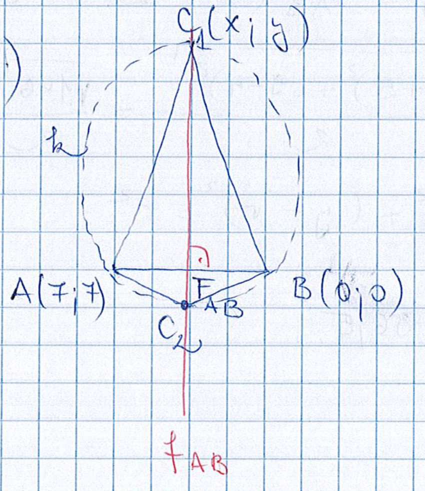
$(x+1)^2-1+(y-1)^2-1-47=0$

$(x+1)^2+(y-1)^2=49$

$u=-1 \quad v=1 \quad r=7$

$\boxed{C(-1;1) \quad r=7}$

c.)



!!! két lehetőség C csúcs lesz

$C \in f_{AB}$ (C rajta van az AB felező ⊥-én)

$f_{AB} \perp AB \iff \underline{n}_{f_{AB}} = \underline{v}_{AB}$

$\underline{v}_{AB}(7;7) \sim (1;1)$

$\underline{n}_{f_{AB}}(\overset{A}{1};\overset{B}{1}) \qquad F_{AB}(\overset{x_0}{3{,}5};\overset{y_0}{3{,}5})$

$f_{AB}:\ Ax+By = Ax_0+By_0$

$f_{AB}:\ x+y=7$

$$\left.\begin{array}{l} C \in f_{AB} \\ C \in k \end{array}\right\} \Rightarrow C = f_{AB} \cap k$$

kör és egyenes metszéspontja
⇓
egyenletrendszer
(2 metszéspont lesz!)

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 7 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 49 \end{array}\right\} \rightarrow x = 7 - y$$

$$(7 - y + 1)^2 + (y-1)^2 = 49$$

$$(8 - y)^2 + (y-1)^2 = 49$$

$$64 - 16y + y^2 + y^2 - 2y + 1 = 49$$

$$2y^2 - 18y + 16 = 0 \quad /:2$$

$$y^2 - 9y + 8 = 0 \qquad a = 1 \quad b = -9 \quad c = 8$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} = \begin{cases} 1 \\ 8 \end{cases}$$

$$y_1 = 1 \qquad x_1 = 7 - y = 7 - 1 = 6$$

$$y_2 = 8 \qquad x_2 = 7 - y = -1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} C_1(6; 1) \\ C_2(-1; 8) \end{array}}$$

30.) $A(\underset{x_1}{1}; \underset{y_1}{-3}) \quad B(\underset{x_2}{7}; \underset{y_2}{-1})$

a.) $e: (x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$

$$(7 - 1)(y + 3) = (-1 + 3)(x - 1)$$

$$6y + 18 = 2x - 2$$

$$2x - 6y = 20 \quad /:2$$

$$\boxed{e: \ x - 3y = 10}$$

b.) P pont illeszkedik egy alakzatra ⟺ koordinátái kielégítik az alakzat egyenletét.

$A \in k$? $\quad A(1; -3) \quad k: x^2 + y^2 - 6x - 2y = 10$

$$1^2 + (-3)^2 - 6 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) = 10$$
$$1 + 9 - 6 + 6 = 10$$
$$10 = 10 \checkmark$$ illeszkedik

$B \in k$? $\quad B(7; -1)$

$$7^2 + (-1)^2 - 6 \cdot 7 - 2 \cdot (-1) = 10$$
$$49 + 1 - 42 + 2 = 10$$
$$10 = 10 \checkmark$$ illeszkedik

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$A(\overset{x_1}{1}; \overset{y_1}{-3})$

$B(\underset{x_2}{7}; \underset{y_2}{-1})$

$$= \sqrt{(7-1)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

c.) $f \perp AB$ és $A \in f$

$f \perp AB \iff \underline{n}_f = \underline{v}_{AB} \quad \underline{v}_{AB}(6; 2) \sim (3; 1)$

$\underline{n}_f(\overset{A}{3}; \overset{B}{1}) \quad A(\overset{x_0}{1}; \overset{y_0}{-3}) \quad Ax + By = Ax_0 + By_0$

$$f: 3x + y = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3)$$

$$\boxed{f: 3x + y = 0}$$

$$\left.\begin{aligned} f&: 3x + y = 0 \rightarrow y = -3x \\ k&: x^2 + y^2 - 6x - 2y = 10 \end{aligned}\right\}$$

$M = f \cap k$

$M \neq A$

$$x^2 + (-3x)^2 - 6x - 2 \cdot (-3x) = 10$$
$$x^2 + 9x^2 - 6x + 6x = 10$$
$$10x^2 = 10$$
$$x^2 = 1$$
$$x_{1,2} = \pm 1$$

$x_1 = -1 \quad y_1 = 3 \quad (-1; 3)$

$x_2 = 1 \quad y_2 = -3 \quad (1; -3)$

$A(1; -3) \quad \boxed{M(-1; 3)}$ a keresett metszéspont

31) $A(5;2)$ $B(-3;-2)$

a.) pont illeszkedik az egyenesre $\Leftrightarrow$ koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét

$e: \quad x - 2y = 1$

$A(5;2)$ $\quad\quad$ $B(-3;-2)$

$5 - 2\cdot 2 = 1$ $\quad\quad$ $-3 - 2\cdot(-2) = 1$

$1 = 1$ ✓ $\quad\quad$ $-3 + 4 = 1$

$1 = 1$ ✓

b.) AB átmérőjű kör kp-ja: F_{AB}

sugara: $r = \dfrac{d_{AB}}{2}$

$F_{AB}(\overset{u}{1};\overset{v}{0})$ $\quad$ $d_{AB} = \sqrt{(5+3)^2+(2+2)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$

$r = \dfrac{\sqrt{80}}{2} = \sqrt{\dfrac{80}{4}} = \sqrt{20}$

$k: \quad (x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$

$\boxed{k: \quad (x-1)^2 + y^2 = 20}$

c.) f érintő $\Leftrightarrow$ $f \perp AB$ $\Leftrightarrow$ $\underline{n}_f = \underline{v}_{AB}$

$\underline{v}_{AB}(8;4) \sim (2;1)$

$\underline{n}_f(\overset{A}{2};\overset{B}{1})$ $\quad$ $B(\overset{x_0}{-3};\overset{y_0}{-2})$ $\quad$ $Ax + By = Ax_0 + By_0$

$f: \quad 2x + y = 2\cdot(-3) + 1\cdot(-2)$

$f: \quad \boxed{2x + y = -8}$

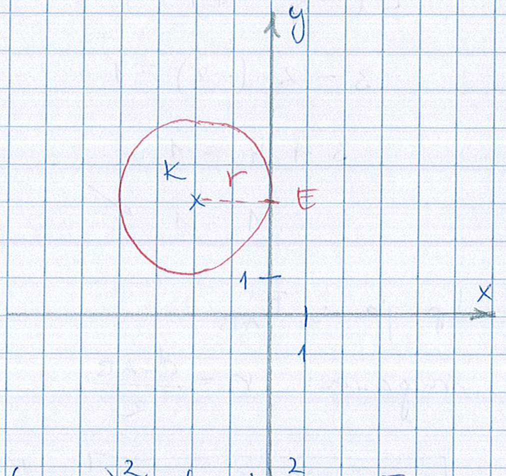
32.) $\underline{n}_e\,(8;1)$ $A \quad B$ $P(1;-3)$ $x_0 \quad y_0$

$e:\ Ax + By = Ax_0 + By_0$

$8x + y = 8\cdot 1 + 1\cdot(-3)$

$\boxed{e:\ 8x + y = 5}$

33.)



$k:\ K(\overset{u}{-2};\overset{v}{3})$

y tg-t érinti $\Rightarrow r = 2$

$k:\ (x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$

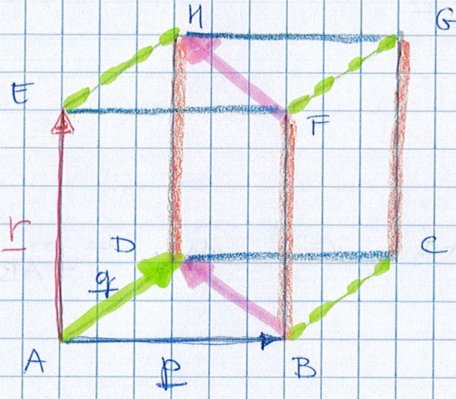
$\boxed{k:\ (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4}$

34.) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$

$K(-3;4)$

$r = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow d = 2\cdot r = 10$

35.)



$\overrightarrow{GC} = -\underline{r}$

(párhuzamos, egyenlő hosszú, ellentétes irányú)

$\overrightarrow{AG} = \underline{p} + \underline{q} + \underline{r}$ (testátló)

$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD} = \underline{q} - \underline{p}$