

9.2. ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

Betűk használata a matematikában – megoldások

- 1107 a) $5n + 4, n \in \mathbb{N}$; b) $8n + 5, n \in \mathbb{N}$; c) $100n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
d) $100n + 17, n \in \mathbb{N}$; e) $\frac{7}{3n}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$; f) $\frac{4n}{4n+3}, n \in \mathbb{Z}$.
- 1108 a) A 9-cel osztható pozitív egész számokat.
b) Azokat a pozitív egész számokat, melyek 8-cal osztva 5-öt adnak maradékul.
c) A 23-ra végződő legalább háromjegyű pozitív egész számokat.
d) A 2-nél a -val kisebb egész számokat (az összes egész számot).
e) A négyzetszámoknál 1-gyel nagyobb természetes számokat.
f) A 3-mal osztva 2 maradékot adó természetes számok 10-ed részét.
- 1109 a) $-4,2xy$; $-4xz$; $-2,8xyz$; $3,6xyz$; $3,8xyz$. b) $-7ab^2$; $-6ab$; $-6ab$; $-4,4a^4b$; $-4,2a^2$.
- 1110 a) -3 ; b) 70 ; c) -2 ; d) 8 ; e) $\frac{4}{3}$; f) $\frac{3869}{300}$.
- 1111 a) $x \neq 0$; b) $x \neq -2$; c) $a \neq -\frac{3}{2}$; d) $x \neq 0, x \neq 1$;
e) $x \neq \frac{4}{5}, x \neq -\frac{1}{3}$; f) $a \neq -\frac{7}{2}, a \neq \frac{3}{8}$; g) $y \neq 3, y \neq -3, y \neq 2, y \neq -2$.
- 1112 Az oldalak: $2x - 2, 2x, 2x + 2$. A terület: $6x, x \in \mathbb{N}, x > 1$.
- 1113 a) Mivel $a = 3n + 2$, attól függően, hogy n 4-gyel osztva milyen maradékot ad, a 12-es maradék lehet 2, 5, 8 vagy 11.
Mivel $b = 4k + 3$, attól függően, hogy k 3-mal osztva milyen maradékot ad, a 12-es maradék lehet 3, 7 vagy 11.
b) Az előző esetek alapján, mivel a maradékok összeadódnak, a lehetséges maradékok: 0-tól 11-ig minden egész szám.

Hatványozás, a számok normálalakja – megoldások

- 1114 a) $2^6 < 2^8$; b) $2^{16} > 2^{12}$; c) $3^6 < 3^9$; d) $2^{15} < 2^{16}$;
e) $2^3 \cdot 3^3 < 3^3 \cdot 2^4$; f) $3^{21} > 3^{20}$; g) $2^{15} \cdot 5^{15} > 2^{12} \cdot 5^{15}$; h) $4^{100} \cdot 10^{100} > 10^{100}$.
- 1115 a) 2; b) 12; c) 4; d) 9; e) 1; f) 18.
- 1116 a) a^{41} ; b) x^{36} ; c) x^{11} ; d) b ; e) x^{26} ; f) $a^4 \cdot b^3$;
g) $a^6 \cdot b^3$; h) $\frac{c^8}{d^6}$.
- 1117 a) $\frac{1}{81}$; b) $-\frac{1}{125}$; c) 8; d) 49; e) $-\frac{27}{125}$; f) $\frac{25}{16}$;
g) $\frac{4}{9}$; h) $-\frac{2}{5}$; i) $\frac{4}{9}$; j) 7.



1118 A kitevők:

a) $-2, -4, -5, -8, -10, 30;$

b) $-2, -3, -4, -5, -11, 40.$

1119 a) $a^3;$ b) $x^{10};$ c) $\frac{1}{8a};$ d) $a^6 \cdot b^8;$ e) $\frac{5^{10}}{b^{12}};$ f) $c^5;$

g) $a^{30} \cdot b^3;$ h) $\frac{d^{21}}{9};$ i) $\frac{2^{18} \cdot 3^4}{e^5}.$

1120 a) $\frac{1}{216} > \frac{1}{729};$ b) $\frac{1}{2^{12}} > \frac{1}{2^{16}};$ c) $\frac{1}{10^{10} \cdot 10^{10}} < \frac{1}{2^{10} \cdot 10^{10}};$

d) $\frac{7^3}{4^3} > \frac{7^3}{5^3};$ e) $\frac{7^2}{5^3} < \frac{7^3}{5^3};$ f) $3^8 = 3^8;$

g) $\frac{8}{7} < 1,6.$

1121 a) $61 \text{ kg} = 6,1 \cdot 10^4 \text{ g} = 6,1 \cdot 10^{-2} \text{ t};$

b) $3,77 \cdot 10^{14} \text{ g} = 3,77 \cdot 10^8 \text{ t}.$

1122 a) $3,33 \cdot 10^{-12} \text{ s};$

b) $8,1 \cdot 10^{11} \text{ m}.$

1123 $4^4 = 2^8, 8^8 = 2^{24},$ ezért $(4^4)^3 = 8^8.$

1124 A szorzat átalakítható: $2^{2007} \cdot 125^{345} \cdot 25^{200} = 2^{2007} \cdot 5^{1035} \cdot 5^{400} = 10^{1435} \cdot 2^{572}.$ A szorzat tehát 1435 darab 0-ra végződik.

1125 a) Igaz. Egész és törtszámok esetén is teljesül.

b) Hamis. A negatív számoknak a páratlan kitevős hatványai negatívak.

c) Igaz. A páros kitevős hatványok pozitívak.

d) Hamis. Lehetnek törtek is.

e) Hamis. Az 1-nek minden hatványa 1.

1126 A tömeg: $\frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 10^6 \text{ g} \approx 6,67 \cdot 10^3 \text{ kg} = 6,67 \text{ t}.$

1127 a) $3^5 = 243.$

b) $3^4 = 81$ -szeresére növekszik.

1128 a) $1,56 \cdot 10^{17} \text{ m}.$

b) $1,04 \cdot 10^6 = 1040\,000$ -szerese.

1129 Csak a 2 és 3 hatványai jöhetnek szóba.

Ha a kihúzott számok a

$$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64$$

közül kerülnek ki, akkor $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ eset lehetséges.

Ha a kihúzott számok a

$$3^0 = 1, 3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81,$$

akkor 1 eset fordulhat elő.

Tehát összesen $21 + 1 = 22$ esetben lehetnek a kihúzott számok ugyanazon szám egész kitevős hatványai.

Egész kifejezések, nevezetes szorzatok, a szorzattá alakítás módszerei – megoldások

1130 a) $-6a^2 + a - 3$; b) $b^3 + 3b^2 - 3$; c) $-3cd^2 - 3c^2 + 5d + 3$;
d) $a^2 - 6a + 6$; e) 1 ; f) $a^2 - 8a - 23$;
g) $-3x^3 + 8x^2 - 14x + 4$; h) $8x + 8$; i) $-6a^2 - 7a + 7$;
j) $16x^2 - 21x - 4$; k) $x + 5$; l) $12x^2 - 30x - 26$.

1131 a) $-3b + 3 = 1$; b) $-a - 3 = -1$; c) $-2a + 1 = 5$;
d) $-3b - 15a - 6 = 22$; e) $9b + 14a = -22$; f) $a + 6b = 2$.

1132 a) $a^2 + 14a + 49$; b) $64 - 16b + b^2$; c) $49 - 14b + b^2$;
d) $9y^2 + 12xy + 4x^2$; e) $16x^2 - 24xy + 9y^2$; f) $100a^2 - 60ab + 9b^2$;
g) $x^4 + 6x^2z + 9z^2$; h) $4x^6 - 12x^3y^2 + 9y^4$; i) $64a^6 - 80a^3b^2 + 25b^4$;
j) $\frac{4}{9} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot xy + \frac{1}{16} \cdot y^2$; k) $\frac{25}{36} \cdot x^2 - \frac{35}{9} \cdot xy + \frac{49}{9} \cdot y^2$;
l) $z^2 + 4x^2 + y^2 + 4zx + 2zy + 4xy$;
m) $9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz - 4yz$;
n) $16x^2 + \frac{4}{25} \cdot y^2 + \frac{1}{49} \cdot z^2 - \frac{16}{5} \cdot xy - \frac{8}{7} \cdot xz + \frac{4}{35} \cdot yz$.

1133 a) $(a + 4)^2 = (-a - 4)^2$; b) $(b - 5)^2 = (5 - b)^2$;
c) $(c + 7)^2 = (-c - 7)^2$; d) $(x - 20)^2 = (20 - x)^2$;
e) $(d^2 - 10)^2 = (10 - d^2)^2$; f) $(x^4 + 5)^2 = (-x^4 - 5)^2$;
g) $(x^3 + 3y^5)^2 = (-x^3 - 3y^5)^2$; h) $(0,5x - 6y^3)^2 = (6y^3 - 0,5x)^2$;
i) $\left(\frac{2}{3} \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot y\right)^2 = \left(-\frac{2}{3} \cdot x^2 - \frac{1}{4} \cdot y\right)^2$.

1134 a) $a^3 + 9a^2 + 27a + 27$; b) $8b^3 - 12b^2 + 6b - 1$;
c) $27c^6 + 108c^4 + 144c^2 + 64$; d) $64d^9 - 96d^6x^2 + 48d^3x^4 - 8x^6$;
e) $0,125x^6 + 1,5x^4y + 6x^2y^2 + 8y^3$; f) $\frac{8}{27} \cdot x^3 - \frac{16}{15} \cdot x^2y + \frac{32}{25} \cdot xy^2 - \frac{64}{125} \cdot y^3$.

1135 a) $9a^2 - 25$; b) $64x^2 - 49$; c) $16b^2 - 4x^2$; d) $36a^2 - 25b^2$;
e) $25c^2 - 9y^2$; f) $25a^6 - 1$; g) $9d^4 - 64$; h) $4y^2 - 81x^4$;
i) $49e^{10} - 100x^6$; j) $\frac{4}{49} \cdot x^{14} - \frac{1}{9} \cdot y^6$.

1136 a) $6a^2 - 2a + 14$; b) $8x^2 - 26x + 36$; c) $12x^2 + 64x + 9$;
d) $2x^2 + 50$; e) $-7b^2 - 32b + 48$; f) $-9x^2 + 24x - 31$;
g) $20c + 78$; h) $x^3 - 8y^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 24x^2 + 12y^2 - 12xy$;
i) $-2x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 23$; j) $\frac{19}{4} \cdot y^2 - x^2 - 2xy$.



- 1137 a) $a^3 - 1$; b) $b^3 + 125$; c) $27x^3 + 64$.
- 1138 a) $(x - 1)^2 - 4$; b) $(a + 2)^2 + 2$; c) $(a + 3)^2 - 8$;
 d) $(x - 4)^2 + 4$; e) $(a - 5)^2 - 23$; f) $(x + 6)^2 + 14$;
 g) $(x + 7)^2 - 18$; h) $2 \cdot (x - 4)^2 - 6$; i) $-(x + 3)^3 + 12$;
 j) $-(x - 6)^2 + 37$; k) $3 \cdot (x + 2)^2 - 10$; l) $-5 \cdot (x + 2)^2 + 13$.
- 1139 a) $a \cdot (3a^2 - 2a + 1)$; b) $2x \cdot (3x^2 - 5x + 1)$; c) $4b \cdot (b^3 + 2b^2 + 7b - 1)$;
 d) $5x \cdot (7x^2 + 3x + 4)$; e) $3a^2 \cdot (2a^2 - 3a + 1)$; f) $4x^3 \cdot (x^2 - 6x + 3)$;
 g) $5a^2b \cdot (ab - 3b^2 + 2)$; h) $17ab^4 \cdot (a^2b + ab^2 - 2)$; i) $8a^2b^3 \cdot (2a^2 + 3b - 5a^2b)$.
- 1140 a) $(a + 3) \cdot (b - 2)$; b) $(2a + b) \cdot (x + 1)$;
 c) $(a + 5) \cdot (2x + y)$; d) $(a - 2x) \cdot (b + 4)$;
 e) $(x + 2) \cdot (3a - b)$; f) $(4x - 1) \cdot (a - 2b) = (2b - a) \cdot (1 - 4x)$;
 g) $(3a + 4b) \cdot (2x + 5)$; h) $(a - 4x^2) \cdot (1 - 5b) = (4x^2 - a) \cdot (5b - 1)$;
 i) $(3a^2 - 4b^3) \cdot (3 - 2x^2) = (4b^3 - 3a^2) \cdot (2x^2 - 3)$.
- 1141 a) $(4x - 5) \cdot (4x + 5)$; b) $(7a + 10b) \cdot (7a - 10b)$;
 c) $(8b + 3x) \cdot (8b - 3x)$; d) $(6x^2 - 11y^3) \cdot (6x^2 + 11y^3)$;
 e) $(x - 10)^2 = (10 - x)^2$; f) $(6a - 7)^2 = (7 - 6a)^2$;
 g) $\left(\frac{2}{5} \cdot x + 5\right)^2$; h) $(4x^2 - 1) \cdot (4x^2 + 1) = (2x - 1) \cdot (2x + 1) \cdot (4x^2 + 1)$;
 i) $(4 + 9x^2) \cdot (4 - 9x^2) = (4 + 9x^2) \cdot (2 + 3x) \cdot (2 - 3x)$;
 j) $(2a^2 + 7b^3)^2$; k) $6 \cdot (x + 1)^2$;
 l) $4x \cdot (x - 3)^2$; m) $3x^2 \cdot (x + 2)^2$;
 n) $5x^2 \cdot (x^2 - 4)^2$;
 o) $(1 + x^6) \cdot (1 - x^6) = (1 + x^6) \cdot (1 + x^3) \cdot (1 - x^3) = (1 + x^6) \cdot (1 + x^3) \cdot (1 - x) \cdot (1 + x + x^2) =$
 $= (1 + x^2) \cdot (1 - x^2 + x^4) \cdot (1 + x) \cdot (1 - x + x^2) \cdot (1 - x) \cdot (1 + x + x^2)$;
 p) $(x + 5) \cdot (x + 3)$; q) $(x - 4) \cdot (x + 3)$;
 r) $(4x^2 + 3) \cdot (x^2 - 4) = (4x^2 + 3) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$;
 s) $(2x + 1)^3$; t) $(3a - b)^3$;
 u) $(2x + 3y)^3$; v) $(a - 3) \cdot (a^2 + 3a + 9)$;
 w) $(x + 4) \cdot (x^2 - 4x + 16)$; x) $(3a + 5b) \cdot (9a^2 - 15ab + 25b^2)$.

1142 a) $(10\,000 - 2) \cdot (10\,000 + 2) = 100\,000\,000 - 4 = 99\,999\,996$;

b) $\frac{(526 + 74) \cdot (526 - 74)}{(726 + 274) \cdot (726 - 274)} = \frac{600 \cdot 452}{1000 \cdot 452} = 0,6$;

c) Legyen $a = 54\,320$:

$$\frac{54\,321 \cdot 54\,325 - 54\,323 \cdot 54\,320}{54\,323 \cdot 54\,322 - 54\,321^2} = \frac{(a+1) \cdot (a+5) - (a+3) \cdot a}{(a+3) \cdot (a+2) - (a+1)^2} = \frac{3a+5}{3a+5} = 1.$$

1143 Az $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kifejezésből

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 23^2 - 2 \cdot (-7) = 543.$$

1144 Egy polinomban az együtthatók összegét megkapjuk, ha a változó helyére 1-et helyettesítünk.

Az $(x^2 - 3x + 1)^{2007}$ kifejezés $x = 1$ esetén:

$$(-1)^{2007} = -1.$$

Tehát a keresett polinomban az együtthatók összege -1 .

1145 Legyenek a téglalap oldalai a és b . Tudjuk, hogy

$$2 \cdot (a + b) = 74,$$

$$a + b = 37,$$

másrészt

$$2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 = 1642,$$

$$a^2 + b^2 = 821.$$

Az $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kifejezésből

$$2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 37^2 - 821 = 548.$$

Tehát a téglalap területe 274 cm^2 .

1146 Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = \\ &= (a - b) \cdot [(a - b)^2 + 2ab + ab] = (a - b) \cdot [(a - b)^2 + 3ab]. \end{aligned}$$

Behelyettesítve:

$$a^3 - b^3 = 2 \cdot (2^2 + 3 \cdot 7) = 50.$$

Műveletek algebrai törtekkel – megoldások

1147 a) $\frac{9a^3}{4b};$

b) $\frac{x}{2};$

c) $-\frac{4}{3a};$

d) $2a;$

e) $-\frac{4}{5} \cdot a^2;$

f) $2y;$

g) $\frac{2x+3}{x+5};$

h) $\frac{1-2x}{1+2x};$

i) $\frac{3x+5}{4x};$

j) $\frac{2y+1}{4x+3};$

k) $\frac{x-4}{x+6};$

l) $\frac{2x-4}{x+2}.$

1148 a) $\frac{ab}{10xy};$

b) $\frac{3by^2}{8ax};$

c) $\frac{y}{x};$

d) $a^2b;$

e) $\frac{b-2}{a \cdot (b-3)};$

f) $\frac{3b+1}{b};$

g) $\frac{1}{x+4};$

h) $\frac{a-1}{a}.$

1149 a) $\frac{4x^2+15}{10x};$

b) $\frac{3-18y}{4y^2};$

c) $\frac{a+7}{a \cdot (a+1)};$

d) $\frac{1}{3};$

e) $\frac{21-12x}{10 \cdot (2x-1)};$

f) $\frac{5a-14}{12 \cdot (3a+5)};$

g) $-\frac{1}{6};$

h) $\frac{8}{(x+2) \cdot (x-2)};$

i) $1;$

j) $\frac{y^2-10y-27}{3 \cdot (y+5)^2};$

k) $\frac{4x^2+22x-5}{(2x-5) \cdot (2x+5)^2};$

l) $\frac{y^2-4y-7}{(y+1)^3}.$



- 1150** a) A tört értelmezve van, ha $4ab^2 + 4abc \neq 0$, azaz $4ab \cdot (b + c) \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b + c \neq 0$.

A számlálóban két négyzet különbsége áll, tehát szorzattá alakítható:

$$\frac{(a^2 + b^2 - c^2 + a^2 - b^2 + c^2) \cdot (a^2 + b^2 - c^2 - a^2 + b^2 - c^2)}{4ab \cdot (b + c)} =$$

$$= \frac{2a^2 \cdot 2 \cdot (b^2 - c^2)}{4ab \cdot (b + c)} = \frac{a \cdot (b - c)}{b}.$$

- b) A törtek nevezői nem lehetnek egyenlők 0-val: $a^2 - b^2 \neq 0$, illetve $(a + b)^2 \neq 0$, azaz $a + b \neq 0$. Mindhárom feltétel teljesül, ha $|a| \neq |b|$.

A számlálókát és a nevezőket is alakítsuk szorzattá, majd egyszerűsítsünk:

$$\frac{ab \cdot (a - b)}{(a - b) \cdot (a + b)} + \frac{a^2 \cdot (a + b)}{(a + b)^2} - \frac{a^2 - 2ab}{a + b} = \frac{ab}{a + b} + \frac{a^2}{a + b} - \frac{a^2 - 2ab}{a + b} = \frac{3ab}{a + b}.$$

- c) A törtek nevezői nem lehetnek egyenlők 0-val:

$$\begin{aligned} a^3 - ab^2 &\neq 0, \\ a \cdot (a^2 - b^2) &\neq 0, & a^2 + ab &\neq 0, & b^2 + ab &\neq 0, \\ a \cdot (a - b) \cdot (a + b) &\neq 0; & a + b &\neq 0; & a \cdot (a + b) &\neq 0; & b \cdot (a + b) &\neq 0. \end{aligned}$$

Minden feltétel teljesül, ha $a \neq 0$, $b \neq 0$, $|a| \neq |b|$.

A zárójeleken belül hozzunk közös nevezőre:

$$\left(\frac{b^2}{a \cdot (a - b) \cdot (a + b)} + \frac{a \cdot (a - b)}{a \cdot (a - b) \cdot (a + b)} \right) : \left(\frac{(a - b) \cdot b}{ab \cdot (a + b)} - \frac{a^2}{ab \cdot (a + b)} \right) =$$

$$= \frac{b^2 + a^2 - ab}{a \cdot (a - b) \cdot (a + b)} \cdot \frac{ab \cdot (a + b)}{ab - a^2 - b^2} = \frac{-1}{a - b} \cdot b = \frac{b}{b - a}.$$

- 1151** a) Alakítsuk át az egyenlőség bal oldalán álló kifejezéseket. Közös nevezőre hozás után egyszerűsítsünk, majd újra hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{6ab - a^2 - 9b^2}{3b} \cdot \frac{a - 6b}{a^2 - 6ab + 9b^2} + \frac{a}{3b} \cdot \frac{a - 3ab - 6b}{a} =$$

$$= \frac{-1}{3b} \cdot (a - 6b) + \frac{a - 3ab - 6b}{3b} = \frac{-a + 6b + a - 3ab - 6b}{3b} = \frac{-3ab}{3b} = -a.$$

- b) A módszer ugyanaz, az első nevező szorzattá alakítása:

$$a^3 - a^2 - a + 1 = a^2 \cdot (a - 1) - (a - 1) = (a - 1) \cdot (a^2 - 1) = (a - 1)^2 \cdot (a + 1).$$

Ezt beírva egyszerűsíthetünk az első zárójelben:

$$\frac{4a^2 - 1}{(a - 1)^2 \cdot (a + 1)} \cdot \frac{(1 - a)^2}{a} = \frac{4a^2 - 1}{a \cdot (a + 1)} = \frac{(2a - 1) \cdot (2a + 1)}{a \cdot (a + 1)}. \quad (1)$$

A második zárójelben legyen a közös nevező $a \cdot (a - 1) \cdot (a + 1)$, ekkor

$$\frac{4a \cdot (a + 1) - 2 \cdot (a - 1) - 8a}{a \cdot (a - 1) \cdot (a + 1)} = \frac{4a^2 - 6a + 2}{a \cdot (a - 1) \cdot (a + 1)}. \quad (2)$$

A számlálót alakítsuk szorzattá:

$$4a^2 - 6a + 2 = 4a^2 - 4a - 2a + 2 = 4a \cdot (a - 1) - 2 \cdot (a - 1) = \\ = (a - 1) \cdot (4a - 2) = 2 \cdot (a - 1) \cdot (2a - 1).$$

Ezt (2)-be beírva egyszerűsíthetünk:

$$\frac{2 \cdot (a - 1) \cdot (2a - 1)}{a \cdot (a - 1) \cdot (a + 1)} = \frac{2 \cdot (2a - 1)}{a \cdot (a + 1)}.$$

(1) és (3) alapján az eredeti kifejezés:

$$\frac{(2a - 1) \cdot (2a + 1)}{a \cdot (a + 1)} \cdot \frac{a \cdot (a + 1)}{2 \cdot (2a - 1)} = \frac{2a + 1}{2}.$$

1152 Alakítsuk át a bal oldalt:

$$\left(a - \frac{ab}{a - b}\right) : \left(\frac{ab}{a - b} - b\right) - \frac{a^2}{2b^2} \cdot \left(2 - \frac{b}{a}\right) = \\ = \frac{a^2 - ab - ab}{a - b} \cdot \frac{a - b}{ab - ab + b^2} - \frac{a^2}{2b^2} \cdot \frac{2a - b}{a}.$$

Egyszerűsítések után:

$$\frac{a^2 - 2ab}{b^2} - \frac{2a^2 - ab}{2b^2} = \frac{-3ab}{2b^2} = -\frac{3a}{2b}.$$

A feltétel szerint: $-\frac{3a}{2b} = -6$, amiből $a = 4b$ következik.

Behelyettesítve a kiszámítandó törtbe:

$$\frac{3a - 2b}{a + b} = \frac{10b}{5b} = 2.$$

Oszthatóság, számrendszerek – megoldások

1153 a) 4-re végződik. b) 2-re végződik. c) 1-re vagy 6-ra végződik.

1154 a) Ha n osztható 4-gyel. b) Nincs ilyen n .

c) Ha $n = 4k + 2$ alakú természetes szám.

1155 a) $x = y = 0$. b) $x = 1; 4; 7$. c) Ha $y = 0$, $x = 0; 3; 6; 9$. Ha $y = 8$, $x = 1; 4; 7$.

d) Ha $y = 0$, $x = 7$. Ha $y = 5$, $x = 2$.

1156 $18a - 6b = 14a + 2 \cdot (2a - 3b)$.

1157 $8a - 3b = 2 \cdot (a + b) + (6a - 5b)$.

1158 a) Az utolsó jegyek összege: $6 + 4 = 10$. b) A hatványok összege 5-re végződik.

c) Mindegyik hatványalap osztható 3-mal.

1159 a) $p = 2$.

b) Csak páros lehetne p , de a 21 nem prím, tehát nincs ilyen prímszám.



1160 $p = 2, q = 5, r = 23$; vagy $p = 2, q = 11, r = 17$.

1161 $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $3750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^4$. A 360-nak 24, a 3750-nek 20 osztója van.

1162 12.

1163 a) $2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$;

b) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3600$;

c) $2^2 \cdot 3^4 = 324$;

d) $2^6 \cdot 7^2 = 3136$;

e) $3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315$;

f) $2^5 \cdot 5^2 \cdot 17 = 13\,600$;

g) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 11 = 1584$;

h) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 = 1\,228\,500$.

1164 a) $\frac{2}{15}$.

b) $\frac{2}{45}$.

c) $\frac{13}{1764}$.

1165 1; 3; 7; 9; 11; 13; 17; 19.

1166 $[a; b] = a \cdot b$.

1167 $a = 5; 10; 15; 45; 30; 90$.

1168 a) 115;

b) 581;

c) 742;

d) 95 285.

1169 a) 11110100100₂;

b) 30311₅;

c) 13020₆.

1170 $1001_2 = 9 < 102_3 = 11 < 23_5 = 13 < 22_7 = 16 < 101_4 = 17 < 31_6 = 19$.

1171 $10010110_2 = 410_6$.

1172 Az összeadás helyesen: $3124_5 + 10232_5 = 13411_5$.

1173 Mivel $21\,600 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, és a négyzetszámok prímtényezősz felbontásában minden kitevő páros, ezért a megfelelő osztó: $2 \cdot 3 = 6$.

Így a hányados valóban négyzetszám:

$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 60^2.$$

1174 A 40-re végződő szám osztható 10-zel. Ha egy szám négyzete lenne, az a szám is osztható lenne 10-zel. De akkor a négyzete 100-zal is osztható lenne, ami nem teljesül.

1175 Legyen a lépcsők száma n . Ez a szám a 2, 3, 4, 5, 6 többszöröseinél 1-gyel kisebb. A fenti számok legkisebb közös többszöröse 60, tehát $60 \mid n + 1$, azaz $n + 1 = 60k$, ahol $k \in \mathbb{N}^+$, másrészt $7 \mid n$. A legkisebb ilyen tulajdonságú számot keressük.

Legyen $k = 1$, ekkor $n = 59$, de a 7 nem osztója az 59-nek.

Ha $k = 2$, akkor $n = 119 = 17 \cdot 7$.

Tehát a legkisebb megfelelő szám a 119.

1176 Amikor Tibor n éves, édesanyja $28 + n$ éves. $n \mid 28 + n$, ezért $n \mid 28$. Tehát Tibor életkora akkor lesz osztója az édesanyjának, ha 1, 2, 4, 7, 14, 28 éves lesz.

1177 a) Hamis. Ha egyik szám osztója a másiknak, akkor a legnagyobb közös osztó a kisebb szám.

b) Igaz. A legkisebb közös többszörös legalább akkora, mint a nagyobb szám.

c) Hamis. A legnagyobb közös osztó csak a közös osztóknak többszöröse.

d) Igaz. Mivel a legnagyobb közös osztó mindkét számnak osztója, ezért a többszöröseiknek is.

e) Igaz. Ha a két számnak nincs közös prímtényezője, akkor a legkisebb közös többszörös a szorzatuk.

f) Hamis. Például $11 + 2 = 13$.

1178 A négyzetszámok prímtényező felbontásában minden kitevő páros, a harmadik hatványban a kitevők oszthatók 3-mal.

Mivel $2 \cdot 5 = 10$, $2 \cdot 3 = 6$, a keresett legkisebb szám csak a 2, 3 és 5 prímtényezőket tartalmazza. A szám prímtényező felbontásában a 2 kitevője páratlan, és 3-mal osztva 2-t ad maradékul, a legkisebb ilyen szám az 5.

A 3 kitevője páros, és 3-mal osztva 2-t ad maradékul. A legkisebb ilyen szám a 2.

Az 5 kitevője páratlan, és 3-mal osztható. A legkisebb ilyen szám a 3.

Tehát a keresett szám:

$$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 36\,000.$$

Ennek a számnak $(5 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (3 + 1) = 72$ osztója van.

1179 Az összeget rendezzük négyes csoportokba:

$$\begin{aligned} & 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{4n} = \\ & = (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + 7^4 \cdot (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + \dots + 7^{4n-4} \cdot (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) = \\ & = (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) \cdot (1 + 7^4 + 7^8 + \dots + 7^{4n-4}). \end{aligned}$$

Mivel

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 7 + 49 + 343 + 2401 = 2800,$$

ezért az összeg utolsó két számjegye 0.

1180 Számoljuk össze a számok osztóit:

$$10^{40} = 2^{40} \cdot 5^{40}, \text{ tehát } 41 \cdot 41 = 1681 \text{ osztója van,}$$

$$20^{30} = 2^{60} \cdot 5^{30}, \text{ tehát } 61 \cdot 31 = 1891 \text{ osztója van.}$$

Mindkét számnál figyelembe vettük a közös osztókat, ezeket el kell vennünk. A legnagyobb közös osztó $2^{40} \cdot 5^{30}$, amelynek $41 \cdot 31 = 1271$ osztója van. Tehát

$$1681 + 1891 - 1271 = 2301$$

olyan pozitív egész szám van, amely osztója a fenti számok valamelyikének.

1181 Képezzük a következő 1-es számjegyekből álló számokat:

$$A_1 = 1; A_2 = 11; A_3 = 111; \dots; A_{2001} = 111\dots111 \text{ (2001 jegy).}$$

Ha van közöttük olyan szám, amely többszöröse a 2001-nek, akkor az állítást beláttuk.

Ha nincs megfelelő szám, akkor van közöttük két olyan (pl. A_i és A_j), amelynek 2001-gyel osztva a maradéka megegyezik. Képezzük A_i és A_j különbségét, ha $i > j$:

$$A_i - A_j = 111\dots111000\dots000 \text{ (} i - j \text{ darab 1-es számjegy).}$$

Ez a különbség a megfelelő számjegyekből áll, és osztható 2001-gyel.

1182 A 7, 8 és 9 legkisebb közös többszöröse $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Ha a keresett 3 jegyű szám x , akkor

$$504 \mid 523\,000 + x.$$

Osszuk el maradékosan 523 000-t 504-gyel:

$$523\,000 = 504 \cdot 1037 + 352.$$

Tehát

$$x = 504 - 352 = 152 \text{ vagy } x = 2 \cdot 504 - 352 = 656,$$

a következő megfelelő szám már 4 jegyű.

A megoldás:

$$523\,152 \text{ és } 523\,656.$$



1183 Az összeadandók 3 jegyűek, az összeg pedig 4 jegyű, tehát $C = 1$.

I. Ha az utolsó tagok összeadásánál $A + 1 < 5$, akkor $B = A + 1$ (és $D = A + 2$).

– Ha $(D =) A + 2 \geq 5$, akkor $A = 3$ vagy $A = 4$, az utóbbi ellentmond az első feltételünknek.
Ha $A = 3$, akkor $B = 4$, $D = 0$ és $E = 3$, ami nem lehet, mert különböző betűk különböző számokat jelölnek.

– Ha $D = A + 2 < 5$, akkor $A = 2$ vagy $A = 0$, az utóbbi esetben $B = 1 = C$, ami nem megfelelő.
Ha $A = 2$, akkor $B = 3$, $D = 4$ és $E = 0$.

II. Ha az utolsó tagok összeadásánál $A + 1 \geq 5$, akkor $A = 4$, $B = 0$, $D = 2$, de $E = 4$, és ez ellentmondás.

Tehát az összeadás helyesen:

$$231_5 + 312_5 = 1043_5.$$

Vegyes feladatok – megoldások

1184 $A = 5 < B = 6$.

1185 a) $\frac{2a+3}{(a+1) \cdot (a+3)}$; b) $\frac{6x-1}{(3x-1) \cdot (3x+1)}$; c) $\frac{4}{x+5}$; d) 4.

1186 a) $\frac{3}{a-b}$; b) $\frac{x+y}{5}$; c) $\frac{a-b}{a+b}$; d) $\frac{x-y}{x+y}$.

1187 a) 2^{10240} ; b) 2^{-160} ; c) 2^{-1500} ; d) 2^{896} .

1188 a) $11110_2 = 30 = 1010_3 < 111_5 = 31 = 133_4$;

b) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-2} = \frac{49}{25} = 1\frac{24}{25} < \left(\frac{39}{26}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25 < \left(\frac{4}{13}\right)^{-1} = \frac{13}{4} = 3,25 < \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{8} = 3,375$.

1189 $96 = 2^5 \cdot 3$.

a) $2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480$;

b) $2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480$;

c) $2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2400$;

d) $2^5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 576 = 24^2$;

e) $2^5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2 = 1728 = 12^3$;

f) $54 = 2 \cdot 3^3$, $[54; 96] = 3^3 \cdot 2^5 = 864$.

1190 a) Igaz.

b) Igaz.

c) Hamis, $x \cdot y = 5$.

d) Igaz.

e) Hamis.

1191 A feladat az 1800 és 6000 legnagyobb közös osztójának megkeresése:

$$1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \quad \text{és} \quad 6000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3,$$

$$(1800; 6000) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600.$$

1192 A fürdőszoba oldalai a 60 cm többszörösei.

Az 54 000 lehetséges osztópárjai közül csak a $60 \cdot 900$ és a $180 \cdot 300$ felel meg.

Az első nem lehet egy fürdőszoba mérete, tehát a fürdőszoba oldalai 1,8 m és 3 m.

1193 a) A 7300 m² területű futballpályán körülbelül $8,76 \cdot 10^8$ fűszál nő.

b) Európa területére $1,47 \cdot 10^9$ futballpálya férne el.