SZÁMELMÉLET

1. a.) nem tartozik a témakörhöz

b.) 25 863

3-mal osztható $\Leftrightarrow$ számjegyek összege (nem függ a sorrendtől) osztható 3-mal

$2+5+8+6+3=24$ $\quad 3 \mid 24 \Rightarrow$ osztható $\boxed{\text{IGAZ}}$

c.) $4 \mid n \Leftrightarrow 4 \mid$ [utolsó két számjegy]

ha 4-gyel osztható $\Rightarrow$ páros számra végződhet csak (mert akkor 2-vel is osztható)

$\underline{x}\ \underline{2}$ $\quad x = \{3;5\}$

$\underline{x}\ \underline{8}$ $\quad x = \{2;6\}$

$\underline{x}\ \underline{6}$ $\quad x = \{3;5\}$

A tízes helyiértéken $\{2;3;5;6\}$ állhat.

2. $3 \mid 314726\Delta$ $\Leftrightarrow$ számjegyek összege osztható 3-mal

$3+1+4+7+2+6+\Delta = 23+\Delta$

$\Delta = \{1;4;7\}$ Nem lehetett az utolsó számjegy 0.

3. a.) $a, b \in \mathbb{Z}^+$ $\quad |a| > |b| \Rightarrow a > b$

$\boxed{\text{IGAZ}}$

b.) $a, b \in \mathbb{Z}$ $\quad |a| > |b| \Rightarrow a > b$

$\boxed{\text{HAMIS}}$ ellenpélda $|-5| > |1|$ és $-5 < 1$

c.) $a \in \mathbb{R}^-$

$$\left.\begin{array}{l} a^n > 0, \text{ ha } n \text{ páros} \\ a^n < 0, \text{ ha } n \text{ páratlan} \end{array}\right\} \boxed{\text{IGAZ}}$$

pl. $(-2)^1 = -2 \quad (-2)^2 = 4 \quad (-2)^3 = -8 \quad (-2)^4 = 16 \ldots$

4.

$$\underbrace{\dots ; x-2 ; x ; x+2 ; \dots}_{}$$ ⊕ 2x

középső

ha a párokat összeadjuk, a párok összege 2x mindig

ha 55 db-ot adunk össze, akkor $\frac{55-1}{2} = 27$ pár van

$27 \cdot 2x + x = 55x$ $\quad 55x = 3905$

$x = 71$ a középső szám

a.) $71 - 27 \cdot 2 = 71 - 54 = 17$ az első szám

$71 + 27 \cdot 2 = 71 + 54 = 125$ az utolsó szám

b.) négyzete 5-re végződik ⇒ 5-tel osztható és a szám is 5-re végződik.

A legkisebb ilyen szám ezek közül a 25, de annak a prímtényezős felbontása (5^2) nem felel meg a feltételnek. A következő a $35 = 5 \cdot 7$, ez már minden feltételnek megfelel.

5.

hetedik 13-mal osztható $\quad 7 \cdot 13$

tizenharmadik 7-tel osztható $\quad 13 \cdot 7$

$7 \cdot 13 = 13 \cdot 7$ $\boxed{\text{egyenlőek}}$

6.

0 ; 5 ; 7

_ _ _

5-tel osztható: {0; 5}-re végződik

3-jegyű: nem kezdődhet 0-val

ha 0-ra végződik: 570, 750

ha 5-re végződik: 705

7.

a.) $\boxed{\text{HAMIS}}$ ellenpélda: $6 \mid 30$ és $10 \mid 30$ de $60 \nmid 30$

$(6;10) \neq 1$ nem relatív prímek

b.) 20-nál kisebb pozitív prímszámok:

$\{2; \underbrace{3; 5; 7; 11; 13; 17; 19}\}$

7 db páratlan összege páratlan

$\boxed{\text{IGAZ}}$

+2 ⇒ páratlan

8. $\left]-\frac{3}{8}; -\frac{1}{8}\right[$

Váltsuk át a törteket 16-odokba!

$\left]-\frac{6}{16}; -\frac{2}{16}\right[$ két eleme: $-\frac{5}{16}$; $-\frac{4}{16}$

9. $2+\frac{2}{3}=\frac{6+2}{3}=\frac{8}{3}$ ennek reciproka:

$\frac{1}{\frac{8}{3}}=\frac{3}{8}$ $3; 8 \in \mathbb{Z}$

10. 1; 2; 3; 4; 5; 6 ismétlődhetnek, ötjegyű

a.) 5 azonos számjegyből áll:

11111
22222
33333
44444
55555
66666

6 ilyen szám van

b.) páros: 2-vel osztható ha végződik {2; 4; 6}

$\underbrace{6\cdot 6\cdot 6\cdot 6}\cdot \underbrace{3}$ ← {2; 4; 6} közül bármelyik

$6^4\cdot 3=3888$ ilyen van

c.) 4-gyel osztható (utolsó 2 számjegy)

végződések: 12; 16; 24; 32; 36; 44; 52; 56; 64
9-féle

az első 3 számjegy: $\underbrace{6\cdot 6\cdot 6}=6^3=216$

$216\cdot 9=1944$ ilyen van

11. 24 egyjegyű pozitív osztói = {1; 2; 3; 4; 6; 8; }

12. $(24; 80)=2^3=8$

mert $24=2^3\cdot 3$ közös prímtényezők a szereplő

$80=2^4\cdot 5$ legalacsonyabb hatványon

13.

2010	2
1005	3
335	5
67	67
1	

2010 prímosztói = $\{2; 3; 5; 67\}$

14.

I. Minden prímszám páratlan. $\boxed{\text{HAMIS}}$

ellenpélda: egyetlen páros prím a 2

II. Létezik páratlan prímszám. $\boxed{\text{IGAZ}}$

III. Minden egész szám racionális. $\boxed{\text{IGAZ}}$

(felírható $\frac{a}{b}$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$ és $b \neq 0$)

IV. Van olyan irracionális szám, amely felírható két egész szám hányadosaként. $\boxed{\text{HAMIS}}$

↳ ezek a racionális számok

15.

$a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^4$

$b = 2 \cdot 5^2 \cdot 11^3 \cdot 13$

$(a;b) = 2 \cdot 5 \cdot 11^3 = 13310$ lnko

$[a;b] = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^4 \cdot 13 = 1.865.263.400$ lkkt

lnko: a közös prímtényezők az alacsonyabbik hatványon

lkkt: MINDEN prímtényező a legmagasabb hatványon

16.

A: ha $a^2 = b^2$, akkor $a = b$ $\boxed{\text{HAMIS}}$

pl. $(-3)^2 = 3^2$

B: $10100_2 = 20_{10}$ $\boxed{\text{IGAZ}}$

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
16	8	4	2	1
1	0	1	0	0

$10100 = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 4 = 20$

C: hatoldalú konvex sokszögnek 6 átlója van. $\boxed{\text{HAMIS}}$

átlók száma: $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$

17.

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

18.

$36\,000 = a + b \qquad a : b = 5 : 4$

$a = 5x$

$b = 4x$

$5x + 4x = 36\,000$

$9x = 36\,000$

$x = 4000 \longrightarrow a = 5 \cdot 4000 = 20.000$

$b = 4 \cdot 4000 = 16.000$

19. A.) $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ szórása 4. $\boxed{\text{HAMIS}}$

lehet számológéppel is számolni, ha tud a gép statisztikát számolni

átlag: $\dfrac{0 + 1 + 2 + 3 + 4}{5} = 2 \qquad (\bar{x})$

szórásnégyzet: D^2

$$\frac{(2-0)^2 + (2-1)^2 + (2-2)^2 + (2-3)^2 + (2-4)^2}{5} =$$

Szórásnégyzet: átlagtól való négyzetes eltérés átlaga

$$= \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = 2$$

szórás: $D = \sqrt{2}$

a szórásnégyzet négyzetgyöke

B.) $\boxed{\text{HAMIS}}$ (a szögeknek is egyenlőeknek kell lenniük!)

C.) 4 és 9 mértani közepe 6. $\boxed{\text{IGAZ}}$

$G = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$

20. a.) $\boxed{\text{IGAZ}}$

b.) $\boxed{\text{HAMIS}}$ ellenpélda: 5; 3 prímek $5-3=2$ is prím

c.) $r = 1\ cm$ $\quad K = 2\cdot r\pi = 2\pi$ $\quad \boxed{\text{IGAZ}}$

$T = r^2\pi = \pi$

d.) ha az átlag 0 $\Leftrightarrow$ párba lehet az adatokat rendezni úgy hogy ellentettek legyenek.

A szórásnégyzetnél az eltérések négyzete csak $\oplus$ lehet, így NEM BIZTOS, hogy 0 a szórás.

pl. $\{-1; 0; 1\}$ $\quad \bar{x} = 0$ $\quad \boxed{\text{HAMIS}}$

$$D = \sqrt{\frac{(0+1)^2+(0-0)^2+(0-1)^2}{3}} = \sqrt{\frac{1+0+1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

21. 2; 3; 4; 5 jegyek voltak

4 tanulót tudunk a különböző osztályzatokból választani, az 5. tanuló a $\boxed{\text{skatulya-elv}}$ alapján már egy olyan csoportból való lesz, ahonnan korábban már választottunk. Vagyis legkevesebb 5 tanulót kell választani.

22. a, b, c) nem tartozik a témakörhöz

d.) ez sem.

23. a) $a_{n-1} = 6$

$a_n = x$ $\qquad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{6+1623}{2} = 814{,}5$

$a_{n+1} = 1623$

számtani sorozat

b.) első: $a_1 = 8$ $\qquad a_n = a_1 + (n-1)d$

$d = 4$ $\qquad 1620 = 8 + (n-1)4$

$a_n = 1620$ $\qquad$ minden 4. szám osztható 4-gyel

23. b.) folytatás

$$1620 = 8 + (n-1)4$$
$$1612 = (n-1)4$$
$$403 = n-1$$
$$n = 404$$
$$S_{404} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{8 + 1620}{2} \cdot 404 = 328.856$$

24. a.) HAMIS $\quad (a; k \cdot a) = a \quad (3;6) = 3$

b.) IGAZ

c.) HAMIS $\quad$ a relatív prímeknek a lnko-ja 1

25.

60 osztói a dobókocka számai közül:

$\{1;2;3;4;5;6\}$

bm. dobás jó $\Rightarrow$ BIZTOS ESEMÉNY $\quad p = 1.$

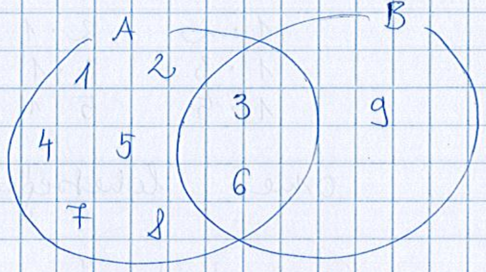
26.

$A = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$

$B = \{3;6;9\}$

$A \cap B = \{3;6\}$

$A \setminus B = \{1;2;4;5;7;8\}$



kell ábra is !!!

27. $3 \mid \overline{2582X} \iff$ számjegyek összege osztható 3-mal

$2+5+8+2+x = 17+x \Rightarrow x = \{1;4;7\}$

28. a.) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$

b.) $\mathbb{Z} \cup \emptyset = \mathbb{Z}$

c.) $\emptyset \setminus \mathbb{N} = \emptyset$

29. A: $\boxed{\text{HAMIS}}$ $0 \in \mathbb{R}$ $|0| = 0$ a 0 se nem (+) se nem (−)

B: $16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^1 = 2$ $\boxed{\text{IGAZ}}$

C: $(6;9) \neq 1$ ezért nem igaz $\boxed{\text{HAMIS}}$

$a \cdot b \mid n \iff a \mid n$ és $b \mid n$ kizárólag akkor igaz, ha $(a;b) = 1$

30. $6 \mid \overline{361X} \iff 2 \mid \overline{361X}$ ÉS $3 \mid \overline{361X}$

$2 \mid \overline{361X}$, ha x páros: $x = \{0; 2; 4; 6; 8\}$

$3 \mid \overline{361X}$, ha a számjegyek összege osztható 3-mal

$3 + 6 + 1 + x = 10 + x$ $x = \{2; 5; 8\}$

Mindkét feltételnek megfelel: $x = \{2; 8\}$ írható az X helyébe.

31. különböző színű ⟹ MEG VAN KÜLÖNBÖZTETVE

⇓

számít a sorrend

szorzatuk prímszám:

$1 \cdot 2$ $2 \cdot 1$
$1 \cdot 3$ $3 \cdot 1$
$1 \cdot 5$ $5 \cdot 1$

kedvező esetek száma: 6

összes lehetséges eset: $\underbrace{\_\ \_}_{6 \cdot 6}$: 36

$$p = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ezt minden val. számításos feladatban le kell írni (ha semmi más nem jó benne, ez akkor is 1 pontot ér!!!)